

CENTAURUS

INTERNATIONAL MAGAZINE
OF THE HISTORY OF SCIENCE AND
MEDICINE

EDITED BY JEAN ANKER †

IN COLLABORATION WITH

A. G. DRACHMANN · MOGENS PIHL · EDV. GOTFREDSEN

AND AN INTERNATIONAL BOARD OF ASSOCIATE EDITORS

5

1956-58

EJNAR MUNKSGAARD · COPENHAGEN

PRINTED IN DENMARK
ANDELSDUGTRYKKERIJET I ODENSE

CONTENTS

Aaboe, Asger, <i>On Babylonian planetary theories</i>	209
Altena, C. O. van Regteren, <i>A second fossil from Scheuchzer's collection in the Teyler Museum</i>	370
Biermann, Kurt-R., <i>Eine Aufgabe aus den Anfängen der Wahrscheinlichkeitsrechnung</i>	142
Brinch, Ove, <i>The medical problems of Henry VIII</i>	339
Czwalina, Arthur, <i>Über einige Beobachtungsfehler des Ptolemäus und die Deutung ihrer Ursachen</i>	283
Drachmann, A. G., <i>How Archimedes expected to move the earth</i>	278
Heller, Siegfried, <i>Eine Beitrag zur Deutung der Theodoros-Stelle in Platons Dialog »Theaetet«</i>	1
Hofmann, Jos. E., <i>Ergänzende Bemerkungen zum »geometrischen« Irrationalitätsbeweis der alten Griechen</i>	59
Hooykaas, R., <i>The concepts of "individual" and "species" in chemistry</i>	307
Huber, Peter, <i>Ueber den Nullpunkt der babylonischen Ekliptik</i>	192
Jonckheere, Frans, <i>La conception égyptienne du squelette</i>	323
Kock, Wolfram, <i>Carolus Linnaeus and surgery</i>	114
Lesley, Mark, <i>Bīrūnī on rising times and daylight lengths</i>	121
Levey, Martin, <i>Technology of oils, fats and waxes in ancient Mesopotamia</i>	151
Pazzini, Prof., <i>A recently discovered new Morgagni</i>	164
Rosen, George, <i>The fate of the concept of medical police 1780–1890</i>	97
Waerden, B. L. van der, <i>The astronomical papyrus Ryland 27</i>	177
Winter, H. J. J., <i>The Arabic optical MSS. in the British Isles. (Mathematical and physical optics)</i>	73

Obituaries

<i>Jean Anker.</i> (A. G. Drachmann)	167
--	-----

Reviews

Cittert, P. H. van, <i>Astrolabes.</i> (A. G. Drachmann)	90
Feldhaus, Franz Maria, <i>Die Maschine im Leben der Völker.</i> (A. G. Drachmann)	176

Merrill, E. D., <i>The botany of Cook's voyages</i> . (Heinrich Marzell) . . .	95
<i>Neue Originalbeiträge zur Entwicklungsgeschichte der höheren Analysis.</i> (J. E. Hofmann)	170
Nissen, Rudolf, <i>Erlebtes aus der Thorax-Chirurgie</i> . (Edv. Gotfredsen)	376
Rosenboom, Maria, <i>Microscopium</i> . (A. G. Drachmann)	375
<i>Science, medicine and history. Essays . . . written in honour of Charles Singer</i> . Collected and ed. by E. Ashworth Underwood. (A. G. Drach- mann)	89
Singer, Dorothea Waley, & Annie Anderson, <i>Catalogue of Latin and vernacular plague texts in Great Britain and Eire in manuscripts writ- ten before the 16th century</i> . (Ernest Wickersheimer).	91
Stevin, Simon, <i>The principal works. Vol. 1</i> . (Jos. E. Hofmann)	93
Taton, R., <i>Causalités et accidents de la découverte scientifique</i> . (L. Ro- senfeld)	373
Wilder, Lucy, <i>The Mayo Clinic</i> . (Wolfram Kock)	94

1180k

EIN BEITRAG ZUR DEUTUNG DER THEODOROS-STELLE IN PLATONS DIALOG »THEAETET«

von

Siegfried Heller*

1. Einleitung.

Es darf wohl als feststehend gelten, daß die Pythagoreer den Satz bewiesen haben: *Durchmesser und Seite eines Quadrats besitzen kein gemeinsames Maß*. Dieser Satz spielte in dem Streite um die Lehre von der Teilbarkeit der Größen eine wichtige Rolle.

Für die Inkommensurabilität der Quadratdiagonale werden gewöhnlich zwei Beweise angeführt, ein arithmetischer und ein geometrischer.

Der *arithmetische Beweis* ist uns im Anhang zum X. Buche der Elemente Euklids überliefert². Der Beweis führt auf indirektem Wege mittels des Widerspruchs von Gerade und Ungerade zum Ziele. Aristoteles verdeutlicht am Beispiel des arithmetischen Beweises mehrfach die indirekte Schlußweise.

Beim *geometrischen Beweis* wird der Euklidische Algorithmus der *ἀνθυπαίρεσις* (Wechselwegnahme) auf die Diagonale und Seite des Quadrats angewandt und gleichfalls indirekt die Richtigkeit des Satzes dargetan. Im Gegensatz zum arithmetischen Beweis findet sich aber der geometrische Beweis in keiner Quelle des Altertums. Dies stellt O. Toepfritz, der den Beweis in seinem gemeinsam mit H. Rademacher herausgegebenen Buche »Von Figuren und Zahlen« bringt, ausdrücklich fest³.

Umstritten ist die Frage, welcher von beiden Beweisen der ältere ist.

Da es sich bei dem Satze von der Inkommensurabilität der Quadratdiagonale um ein *geometrisches Problem* handelt, liegt natürlich die Vermutung nahe, daß die Pythagoreer diesen Satz zunächst *geometrisch*

* Schleswig, Chemnitzstr. 72, Deutschland.

bewiesen haben. Noch ein anderer Grund spricht für diese Annahme. Wie aus einer Stelle in der Mathematikgeschichte des Eudemos und aus anderen Berichten hervorgeht, hat Hippasos von Metapont (um 450 v. Chr.) bei der Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks die stetige Teilung gefunden und dabei als erster die Inkommensurabilität von Diagonale und Seite des Fünfecks entdeckt⁴. Es kann als ziemlich sicher unterstellt werden, daß er sich dabei einer geometrischen Methode bedient hat. Höchstwahrscheinlich hat er Gedankengänge verfolgt, wie wir sie im Beweis des Lehrsatzes II, 11 von Euklid über die stetige Teilung einer Strecke vorfinden. Wie weiter unten gezeigt wird, dürfen wir die Kenntnis dieses Lehrsatzes bei den alten Griechen voraussetzen. Wenn aber die Pythagoreer bei diesem »ersten Unmöglichkeitsbeweis« *geometrisch* vorgegangen sind, so werden sie bei dem zweiten Beispiel dieser Art, bei dem Beweis für die Inkommensurabilität von Diagonale und Seite des Quadrats, gleichfalls ein *geometrisches Verfahren* bevorzugt haben.

Eine einfache Überlegung konnte sie übrigens auch in diese Richtung gelenkt haben. Da der zu beweisende Satz äquivalent mit dem Satz von der Irrationalität von $\sqrt{2}$ ist, so mußte ein großes Gebiet der Algebra, die Proportions- und Ähnlichkeitslehre, ihre *allgemeine* Gültigkeit verlieren, sobald die Existenz von irrationalen Größen bewiesen war; denn die bisherige Proportionslehre war auf dem *Begriff der ganzen Zahl* aufgebaut und ließ sich nicht ohne weiteres auf irrationale Größen anwenden. Daher lag es nahe, den Beweis für den neuen Satz auf einem neutralen Gebiet zu suchen, und als solches konnte nur die *Geometrie* in Frage kommen. In diesem Sinne äußert sich auch H. G. Zeuthen in seiner »Geschichte der Mathematik im Altertum und im Mittelalter«⁵: »Aus der Entdeckung der irrationalen Größen ergab sich, daß man eine exakte Mathematik nicht durch Rechnungen mit ganzen Zahlen aufbauen konnte. Entschlossen griffen die Pythagoreer deswegen dazu, ihr in der Geometrie, die sich ... schon zur Darstellung arithmetischer Verhältnisse als nützlich erwiesen hatte, eine neue Grundlage zu geben«.

In jener Zeit entstanden wahrscheinlich die zahlreichen algebraisch-geometrischen Untersuchungs- und Beweismethoden, welche die mathematischen Arbeiten der alten Griechen kennzeichnen und die – um nur einige Namen zu nennen – von Euklid und Archimedes zu einem hohen Grade der Vollkommenheit ausgebildet wurden. Heiberg gibt in seiner »Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaften«⁶ Beispiele für diese Verflechtung algebraischer und geometrischer Betrachtungsweise, und E. Sachs spricht in ihrer eingehenden Untersuchung über »Die fünf

Platonischen Körper«⁷ von »der für die Griechen so charakteristischen Art, in der Arithmetik überall von der geometrischen Anschauung auszugehen«.

Bevorzugten also in jenen Zeiten des Umbruchs die griechischen Mathematiker aus Neigung und aus praktischen Gründen die geometrische Betrachtungsweise, so waren nach dem Stande des damaligen mathematischen Wissens auch die Voraussetzungen für einen *geometrischen Beweis* des fraglichen Lehrsatzes durchaus gegeben. Dies geht aus den Berichten des Theon von Smyrna (um 130 n. Chr.)⁸ und des Proklos Diadochos (410–485)⁹ über die sog. *Seiten- und Durchmesserzahlen* hervor. Beide Berichte gehen nach den Untersuchungen von Fr. Hultsch¹⁰ unabhängig voneinander auf eine gemeinsame Quelle zurück; als solche kommt die *μαθημάτων θεωρία* des Geminus von Rhodos (um 75 v. Chr.) in Frage. Wir können uns also mittelbar auf einen Bericht stützen, der rund 400 Jahre nach der Entdeckung der Seiten- und Durchmesserzahlen verfaßt wurde.¹¹

2. Die Reihen der Seiten und Diagonalen von Quadraten.

Nach Proklos¹², dessen Bericht vollständiger und aufschlußreicher als der des Theon ist, kamen die Pythagoreer und Platon auf den Gedanken zu sagen: *Wenn die Seite eines Quadrats aussprechbar ist, dann ist der Durchmesser nicht ohne weiteres aussprechbar, sondern wird es erst dadurch, daß sein Quadrat (in den Quadraten, wo dies möglich ist) um die Einheit größer oder kleiner gemacht wird als das doppelte Quadrat der Seite.* Man muß z. B. beim Quadrat mit der Seite 2 ihr doppeltes Quadrat 8 um 1 vergrößern, um das Quadrat 9 der aussprechbaren Diagonale 3 zu erhalten. Beim Quadrat mit der Seite 5 dagegen erhält man das Quadrat 49 der aussprechbaren Diagonale 7, indem man vom doppelten Seitenquadrat 50, die Eins abzieht.

Zur Begründung dieser Lehre haben die Pythagoreer nach dem Bericht des Proklos »folgenden eleganten Satz (*θεώρημα γλαφυρόν*) über die Durchmesser und Seiten aufgestellt: Der Durchmesser eines Quadrats, um die zugehörige Seite verlängert, wird die Seite (eines neuen Quadrats), die Seite aber, um sich selbst und den zugehörigen Durchmesser verlängert, wird der Durchmesser (des neuen Quadrats). Und dies wird mittels der Elemente im 2. Buche von jenem (gemeint ist Euklid) geometrisch bewiesen: Halbiert man eine Gerade [*AB* durch *C*], und verlängert sie um eine Strecke [*BD*], so sind das Quadrat über der ganzen Strecke samt der

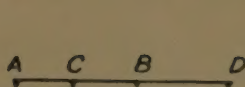


Fig. 1.

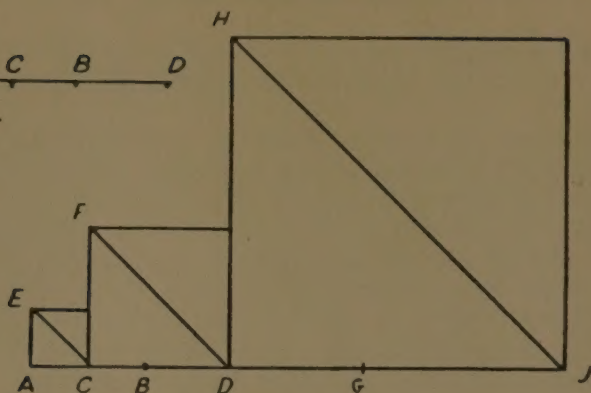


Fig. 2.

Verlängerung $[AD]$ und das Quadrat über der Verlängerung allein doppelt so groß wie die Quadrate über einer Hälfte $[AC]$ und über der anliegenden Hälfte samt der Verlängerung $[CD]$ « (Fig. 1):

$$AD^2 + BD^2 = 2 \cdot (AC^2 + CD^2).$$

Zeichnet man über AC das Quadrat mit der Diagonale CE , macht $BD = CE$ und zeichnet über CD das Quadrat mit der Diagonale DF , so folgt aus dem eben erwähnten Lehrsatz (Euklid II,10) wegen $BD^2 = 2 \cdot AC^2$ die Gleichheit der Strecken DF und AD (Fig. 2).

An das neue Quadrat kann man wieder ein Quadrat anfügen, dessen Seite gleich der Summe aus der Seite und Diagonale des vorhergehenden Quadrats ist. Man braucht nur auf der Verlängerung von CD die Strecken $DG = CD$ und $GJ = DF$ abzutragen und über DJ das Quadrat zu konstruieren; dann ist seine Diagonale $JH = JC$. Diese Konstruktionen können beliebig fortgesetzt werden; in jedem neuen Quadrat ist die Diagonale gleich der Summe aus der doppelten Seite und der Diagonale des vorhergehenden Quadrats.

Werden die Seiten der aufeinander folgenden Quadrate mit $s_1, s_2, \dots$ und die Diagonalen mit $d_1, d_2, \dots$ bezeichnet, so erhält man die Reihen:

$$\begin{aligned} s_1, & \quad s_2 = s_1 + d_1, & s_3 = s_2 + d_2, & \dots \\ d_1, & \quad d_2 = 2s_1 + d_1, & d_3 = 2s_2 + d_2, & \dots \end{aligned}$$

hierbei ist das Quadrat eines jeden Gliedes der unteren Reihe gleich dem doppelten Quadrat des darüber stehenden Gliedes.

Allgemein ist:

$$\left. \begin{aligned} s_n &= s_{n-1} + d_{n-1} \\ d_n &= 2s_{n-1} + d_{n-1} = s_n + s_{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Aus diesen Reihen haben die Pythagoreer nach der gleichen Quelle¹³ die arithmetischen Doppelreihen der *Seiten- und Durchmesserzahlen* abgeleitet. Auf diese Reihen soll weiter unten eingegangen werden.

Aus dem Bericht des Proklos können wir folgern, daß der Satz Euklid II,10 bereits den griechischen Mathematikern des 5. Jahrhunderts v. Chr. bekannt war. In Ansehung des systematischen Aufbaus der »Elemente« ist der Schluß berechtigt, daß damals auch die vorhergehenden Sätze des I. und II. Buches der »Elemente« in der Schule der Pythagoreer Verwendung fanden; das Gleiche gilt wahrscheinlich auch für die übrigen Lehrsätze des II. Buches, da diese Sätze nicht ohne Grund in *einem* Buche zusammengefaßt sind.

Wichtig ist nun hier die Feststellung, daß Proklos zu Beginn seines Berichts sagt¹⁴: οὐ γὰρ ἐστὶν τετράγωνος ἀριθμὸς τετραγώνου διπλάσιος ᾧ καὶ ὁῦλον ὅτι ἀσύμμετρόν ἐστιν μεγέθη. »Es gibt keine Quadratzahl, die doppelt so groß wie eine Quadratzahl ist; daraus folgt auch, daß es inkommensurable Größen gibt«.

Wenn diese Erläuterung des Proklos auch nur als Kommentar zu dem nachfolgenden Bericht zu werten ist, so erscheint sie doch deshalb bedeutungsvoll, weil hier zum ersten Male die Seiten- und Durchmesserzahlen in Verbindung mit inkommensurablen Größen gebracht werden.

Und in der Tat kann die Folge der Quadrate, welche zu den Seiten- und Durchmesserzahlen führt, auch dazu dienen, die Inkommensurabilität der Diagonale und Seite des Quadrats *auf geometrischem Wege* zu beweisen.

3. Geometrischer Beweis für die Inkommensurabilität der Quadratdiagonale.

Das Konstruktionsverfahren, das eine Folge immer größer werdender Quadrate liefert, läßt sich leicht umkehren, sodaß man eine Folge immer *kleiner* werdender Quadrate erhält. Geht man vom großen Quadrat in Fig. 2 aus, so hat man nur die Diagonale *JH* auf der Grundlinie *JD* und ihrer Verlängerung abzutragen, wodurch man wegen *JH = JC* sofort die Seite *CD* des nächstkleineren Quadrats erhält. Für die Seite und Diagonale dieses Quadrats ergeben sich aus den Gleichungen (1) die Beziehungen

$$s_{n-1} = d_n - s_n \quad \text{und} \quad d_{n-1} = s_n - s_{n-1}. \quad (2)$$

$$\text{Wegen} \quad d_{n-1} > s_{n-1} \quad \text{ist} \quad s_{n-1} < \frac{1}{2} \cdot s_n. \quad (3)$$

Diese »Umkehrung« des von Proklos beschriebenen Konstruktionsverfahrens ist entscheidend für die Auffindung des *geometrischen Beweises* der Inkommensurabilität der Quadratdiagonale. Hierauf weist bereits Herr J. E. Hofmann in seiner »Geschichte der Mathematik« hin. Nachdem er die eben beschriebene Herleitung der Seiten- und Diagonalzahlen erwähnt hat, fährt er fort¹⁵: »schließlich erkennt man – vielleicht durch Umkehren des eingeschlagenen Verfahrens – die Irrationalität des Verhältnisses [nämlich der Diagonale zur Seite des Quadrats] (um 400)«. ¹⁶

Will man nun beweisen, daß die Diagonale JH und die Seite DJ des großen Quadrats (Fig. 2) inkommensurabel sind, so ist der Lehrsatz 2 im X. Buche von Euklids Elementen heranzuziehen: »Wenn von zwei ungleichen Größen die kleinere von der größeren (der Rest von der kleineren und so) abwechselnd fortgenommen wird und der Rest niemals die zuletzt fortgenommene Größe mißt, so werden die Größen inkommensurabel sein.«

H. G. Zeuthen ist auf Grund seiner eingehenden Untersuchungen über die arithmetischen Bücher in Euklids Elementen¹⁷ und über die Entstehung der Lehre vom Irrationalen¹⁸ der Ansicht, daß Theodoros von Kyrene (um 400 v. Chr.) obigen Satz benutzt hat, um die Inkommensurabilität der Seiten des 3-fachen, 5-fachen usw. Quadrats nachzuweisen. Er hält es sogar für sehr wahrscheinlich, daß dieser Satz von Theodoros selbst stammt, und pflegt ihn daher in seinen Abhandlungen als »le critère de Théodore« zu bezeichnen. *Wir dürfen uns also für berechtigt halten, den Lehrsatz Euklid X,2 für die Rekonstruktion des geometrischen Beweises mit heranzuziehen.*

Der Beweis läßt sich nun folgendermaßen durchführen: Trägt man die Seite $JD = s_n$ des großen Quadrats auf der Diagonale $JH = d_n$ ab, so erhält man die Seite $CD = s_{n-1}$ des nächsten Quadrats [s. erste Gl. von (2)]. Dieser Rest ist so oft wie möglich von der Seite JD abzuziehen. Da sich JD aber aus DG gleich der Seite CD und GJ gleich der Diagonale DF zusammensetzt [s. erste Gl. von (1)], so hat man CD nur noch von GJ abzuziehen, d. h. man hat im nächstkleineren Quadrat wieder die Differenz von Diagonale und Seite zu bilden. Dadurch erhält man die Seite s_{n-2} des nächsten Quadrats. Diese Wechselwegnahme läßt sich beliebig fortsetzen, da ja auch die Folge der Quadrate kein Ende hat. Und immer gilt hierbei gemäß Gl. (3):

$$s_{k-1} < \frac{1}{2} \cdot s_k \quad (k \leq n) \quad (4)$$

Jetzt werde angenommen, $HJ = d_n$ und $DJ = s_n$ seien kommensurabel und besäßen die kleine Strecke ε als gemeinsames Maß. Und das wechselseitige Abtragen der kleineren von der größeren Strecke werde so lange fortgesetzt, bis sich ein Rest einstellt, der kleiner als ε ist. Dieser Rest sei die Quadratseite s_0 .

Da ε die Diagonale d_n und die Seite s_n mißt, so mißt ε auch deren Differenz, nämlich die Seite $CD = s_{n-1}$. Und da nach Gl. (2) $DF = d_{n-1} = s_n - s_{n-1}$ ist, mißt ε auch die Diagonale d_{n-1} . In den folgenden Quadraten wird also immer die Diagonale und die Seite durch ε meßbar sein. Daher wird schließlich ε auch die Seite s_0 messen, die aber kleiner als ε ist. Die größere Strecke würde also die kleinere Strecke messen; dies ist aber unmöglich. Also kann ε nicht die Strecken d_n und s_n messen. Diagonale und Seite des Quadrats sind daher inkommensurabel.

Der Wortlaut dieses Beweises lehnt sich eng an die Redewendungen bei Euklid X,2 an; der Beweis könnte in dieser Form um die Wende des 5. und 4. Jahrhunderts v. Chr. von einem griechischen Mathematiker ausgesprochen worden sein.

Es sei noch besonders darauf hingewiesen, daß in diesem Beweis keine Proportionen verwandt werden, und daß auch nicht von ähnlichen Figuren gesprochen wird. Die Quadrate, die dem Beweis zugrunde liegen, sind zwar ähnliche Vielecke; doch vom Ähnlichkeitsbegriff selbst wird kein Gebrauch gemacht.

Aber der Beweis hat an einer Stelle eine Lücke: Es fehlt die Begründung dafür, daß man bei der Fortsetzung der Wechselwegnahme wirklich zu einer Seite $s_0 < \varepsilon$ gelangen kann. Diese Möglichkeit ergäbe sich, wenn man annehmen wollte, daß damals bereits der Lehrsatz X,1 von Euklid bekannt gewesen ist: »Sind zwei ungleiche Größen vorgelegt und nimmt man von der größeren mehr als die Hälfte weg und vom Reste wiederum mehr als die Hälfte und fährt so fort, so wird schließlich eine Größe übrigbleiben, die kleiner als die vorgegebene kleinere Größe ist.«

Gl. (4) besagt nun, daß die Voraussetzung für die Anwendung des Lehrsatzes X,2 tatsächlich erfüllt ist. Damit ließe sich also die Lücke in dem obigen Beweis schließen. Daß Euklid bei seinem Beweis von X,2 nicht besonders auf den Lehrsatz X,1 hinweist, ist nicht verwunderlich; denn Euklid gibt solche Hinweise nur in den seltensten Fällen. Aus der Anordnung der beiden Lehrsätze, die Euklid im X. Buche der Elemente unmittelbar den Definitionen folgen läßt, geht unzweideutig hervor, daß er sich beim Beweis des 2. Lehrsatzes auf den 1. stützt.

Man könnte also vermuten, daß bereits zu Theodoros' Zeit der Lehrsatz X,1 bekannt war. Jedoch liegen hierüber keine speziellen Berichte aus früherer Zeit vor. Auch ist zu bedenken, daß Euklid den Lehrsatz X,1 mit Hilfe des einer späteren Zeit angehörenden Axioms von Eudoxos (408–355 v. Chr.), der Definition 4 des V. Buches, beweist. Die Frage muß also offen bleiben, ob die oben im geometrischen Beweis festgestellte Lücke mittels des Satzes X,1 oder eines ihm äquivalenten Satzes geschlossen wurde. Möglicherweise hat man sich des Satzes X,1 bedient, indem man ihn als Axiom voraussetzte. Dies würde bedeuten, daß wir hier *die ersten Spuren des Stetigkeitsaxioms von Eudoxos* aufdecken können. Es verdient aber, vermerkt zu werden, daß der notgedrungene Verzicht auf die Verwendung von Proportionen beim geometrischen Beweis zu einer Schwierigkeit führt, die sich mittels des für die Proportionslehre des Eudoxos so wichtigen Stetigkeitsaxioms beheben läßt.

Trotz dieser zweifelhaften Stelle im Beweis, die wahrscheinlich niemals völlig geklärt werden kann, darf man doch wohl als Ergebnis feststellen *daß bereits um die Mitte des 5. Jahrhunderts v. Chr. die griechischen Mathematiker die Möglichkeit besaßen, einen geometrischen Beweis für die Inkommensurabilität von Diagonale und Seite des Quadrats zu führen.*

Daß ein derartiger Beweis in früherer Zeit einmal vorhanden gewesen sein muß, läßt sich aus einer mathematischen Stelle bei Aristoteles folgern.

Aristoteles zieht in den *Analytica priora* wiederholt den Satz von der Inkommensurabilität der Quadratdiagonale zur Erläuterung seiner Ausführungen heran. Dieser Satz ist nach Heiberg¹⁹ eines seiner Lieblingsbeispiele. Nach dem Index von Bonitz wird er im *Corpus Aristotelicum* 26mal erwähnt. Hier interessiert zunächst eine Stelle, wo Aristoteles das Wesen des indirekten Beweises erklärt.

An der Stelle *An. pr. I, Kap. 22, 41^a 23–27²⁰*: πάντες γὰρ οἱ διὰ τοῦ ἀδυνάτου περαίνοντες, τὸ μὲν ψεῦδος ἀλλογιζονται, τὸ δ' ἐξ ἀρχῆς ἐξ ὑποθέσεως δεικνύουσιν, ὅταν ἀδυνάτῳ τι συμβαίῃ τῆς ἀντιθέσεως τεθείσης· οἷον, ὅτι ἀσύμμετρος ἡ διάμετρος, διὰ τὸ γίνεσθαι τὰ περιττὰ ἴσα τοῖς ἀρτίοις συμμετρὸν τεθείσης führt Aristoteles aus: Beim Beweis per impossibile geht man von einer falschen Annahme aus und beweist durch ein hypothetisches Verfahren die Richtigkeit der ursprünglichen Behauptung dadurch, daß aus der Annahme der gegenteiligen Behauptung etwas Unmögliches folgt. Man beweist z. B., daß der Durchmesser (des Quadrats) inkommensurabel ist, dadurch, daß man aus der Annahme, er sei kommensurabel, folgert, eine ungerade Zahl müsse gleich einer geraden sein.

In unserem Falle ist nun folgende Stelle in den *Analytica priora* II,

Kap. 19, 65^b16–21²¹ von Wichtigkeit: *Τὸ γὰρ ἀναλτιον ὡς αἴτιον τιθεῖναι, τοῦτο ἐστὶν · οἶον, εἰ βουλόμενος δεῖξαι ἀσύμμετρος ἢ διάμετρος, ἐπιχειροῖη τὸν Ζήνωνος λόγον [δεικνύναι] ὡς οὐκ ἔστι κινεῖσθαι · καὶ εἰς τοῦτο ἀπάγοι τὸ ἀδύνατον · οὐδαμῶς γὰρ οὐδαμῇ συνεχές ἐστι τὸ ψεῦδος τῇ φάσει τῇ ἐξ ἀρχῆς.* Den Nicht-Grund als den Grund zu setzen, entspricht der Annahme, jemand wollte etwa beim Beweis, daß der Durchmesser inkommensurabel ist, das Verfahren von Zenon bei seinem Beweis für die Unmöglichkeit von Bewegung anwenden und darauf die Unmöglichkeit (daß der Durchmesser kommensurabel ist) zurückführen. Die falsche Schlußfolgerung von Zenon hängt nämlich in gar keiner Weise mit der anfänglichen Aussage zusammen.

Th. Heath sagt in seinem Buche »Mathematics in Aristotle«²², die Deutung dieser Stelle sei schwierig, zumal auch die griechischen Kommentatoren nicht viel zu ihrer Aufhellung beigetragen hätten. So viel dürfe aber wohl klar sein: Was Aristoteles hier als Beispiel anführt, sei der Versuch, die Inkommensurabilität der Quadratdiagonale irgendwie mittels der Beweismethode von Zenon zu beweisen. Heath glaubt daher, daß sich die Bemerkung von Aristoteles gegen diejenigen richtet, welche die Inkommensurabilität der Diagonale mit Hilfe einer »unendlichen Regression« nach Zenons Vorbild beweisen wollten. Heath fährt dann fort: »Euclid proves in his Prop. 2 of Book X that, if we apply to two incommensurable magnitudes the process of finding the greatest common measure, the process will never come to an end. His proof by *reductio ad absurdum* shows that, if the process *did* come to an end, the magnitude would be commensurable and not incommensurable. It seems, therefore, as if the argument referred to by Aristotle, beginning with the assumption that the diagonal is commensurable with the side of a square, revealed some »infinite regress«, and it was then inferred that Zeno's argument, as, for example, in the *Achilles*, to prove that motion is impossible (which is, of course, absurd), would apply in this case.«

Heath erwähnt dann noch ein anonymes Scholium zu der zuletzt zitierten Stelle, in welchem ein ähnlicher Gedanke ausgesprochen wird.

Um die Stellungnahme von Aristoteles zu dem *geometrischen Beweis* der Inkommensurabilität der Quadratdiagonale richtig beurteilen zu können, muß man sich daran erinnern, daß nach Aristoteles ein Beweis nur dann als wissenschaftlich (oder zwingend) anzusehen ist, wenn man ihn aus einem System von Axiomen durch eine *endliche* Anzahl von Gedankenschritten herleiten kann. Tatsächlich enthält aber der geometrische Beweis eine »unendliche Regression« und zwar in der Folge von

Quadraten, die dem Beweis zugrunde liegen. Beim Beweisverfahren selbst mittels des Euklidischen Algorithmus kommt man allerdings mit einer *endlichen* Zahl von Gedankenschritten aus.

Aus der Vergleichung dieser beiden Aristoteles-Stellen darf man wohl den Schluß ziehen, daß damals außer dem arithmetischen auch ein geometrischer Beweis für die Inkommensurabilität der Quadratdiagonale bekannt war, und daß letzterer sich offenbar auf den später als Lehrsatz X,2 bekannten Satz stützte. Wahrscheinlich hat aber Aristoteles den ersten Beweis bevorzugt, weil bei ihm aus der Annahme des Gegenteils der Behauptung ohne viel Umstände etwas Sinnwidriges folgt, was jedem sofort einleuchtet. Der geometrische Beweis beruhte dagegen auf einem nicht so leicht übersehbaren Verfahren, und der Widerspruch, auf den er führte, betraf Dinge, die nur in unsrer Vorstellung existieren und nicht die Realität wie die natürlichen Zahlen besitzen, alles Gründe, aus denen Aristoteles den geometrischen Beweis als untauglich für ein Beispiel seiner Lehre ansehen mußte.

Aristoteles' ablehnende Haltung gegenüber dem geometrischen Beweis hat sicherlich neben anderen Gründen, auf die weiter unten eingegangen werden soll, mit dazu beigetragen, daß dieser Beweis aus dem mathematischen Lehrstoff verschwand, immer seltener erwähnt wurde und schließlich ganz in Vergessenheit geriet.

4. Die Theodoros-Stelle in Platons Dialog »Theaetetus« als geschichtliche Quelle.

Die Lehre von den Irrationalitäten erhielt zu Lebzeiten Platons ihr wissenschaftliches Gewand. Platon selbst nahm an dieser Entwicklung lebhaften Anteil und stand in enger Berührung mit den beiden Männern, die zum Ausbau der Theorie Wesentliches beigetragen haben, Theodoros von Kyrene und Theaetetus von Athen (etwa 416–368). Die Nachrichten über diese beiden Mathematiker sind äußerst spärlich. Im Mathematiker-Verzeichnis bei Proklos²³ wird der »*namhafte Fachvertreter*« Theodoros von Kyrene erwähnt. Dann wird näher auf Platon eingegangen, der »*seine Schriften mit mathematischem Gedankengut ganz und gar durchsetzt hat*« und dem es »*zu verdanken ist, daß die anderen mathematischen Wissenschaftszweige und besonders die Geometrie den größten Aufschwung nahmen*«. Anschließend wird neben dem Thasier Leodamas und Archytas von Tarent auch über Theaetetus von Athen berichtet, daß sie »*die Lehrsätze*

vermehrt und in ein den wissenschaftlichen Anforderungen entsprechenderes System gebracht« haben. Später begegnet uns in diesem Bericht der Name des Theaetet noch zweimal: Hermotimos von Kolophon habe die Ergebnisse des Eudoxos und des Theaetet »weiterentwickelt«, und Euklid habe »viele Ergebnisse des Eudoxos zusammengefaßt und die des Theaetet zum Abschluß gebracht«.

Aus dieser zeitlich angeordneten Aufzählung darf man schließen, daß das mathematische Gedankengut von Theodoros über Platon an Theaetet weitergegeben wurde. Diese Ansicht vertritt u. a. H. Vogt, der hierfür noch weitere Gründe beibringt²⁴ und Herr J. E. Hofmann in seiner »Geschichte der Mathematik«²⁵.

In dem Dialog »Theaetet« tritt Platon mit seiner Person ganz zurück und stellt die Entwicklung der Lehre von den irrationalen Größen so dar, als ob Theaetet unmittelbar ein Schüler des Theodoros gewesen sei. Damit gestaltet Platon, wie H. Vogt ausführt²⁶, die *geistige Abhängigkeit* nach dem Recht des Dichters zu einer *persönlichen*. Und diese Abhängigkeit darzustellen, dazu war gewiß kein anderer so berufen wie Platon, der als Mittler zwischen beiden stand.

Aus dem Rahmengespräch, mit dem der Dialog eingeleitet wird, erfahren wir Näheres über das Lebensende Theaetets, der verwundet und schwerkrank aus dem Felde nach Hause zurückkehrt (nach dem Gefecht zwischen den Athenern und Thebanern i. J. 368 v. Chr.). Wahrscheinlich ist der Dialog kurze Zeit nach dem Tode Theaetets entstanden. Dies und die besondere Art, wie Theaetet als Jüngling und als gereifter Mann geschildert wird, deuten darauf hin, daß »offenbar außer der künstlerischen noch eine andere Tendenz hier maßgebend gewesen ist. Die Vermutung hat viel für sich, daß dieser Dialog zugleich die Stelle eines freundschaftlichen Nachrufs für den dem Platon befreundeten berühmten Mathematiker vertreten sollte«²⁷.

Angesichts der dichterischen Freiheit, mit der Platon den Dialog gestaltet, ist die Frage berechtigt, wie weit sein Werk als *Geschichtsquelle* in Anspruch genommen werden darf. Die ganze Szene, in der Theaetet mit Theodoros und Sokrates zusammengeführt wird, ist der Phantasie des Dichters entsprungen, und das Gleiche gilt auch für das Wechselgespräch zwischen den Personen des Dialogs. Aber der Hintergrund, vor dem sich alles abspielt, die geistige Atmosphäre, in der das Gespräch stattfindet, entspricht den Tatsachen. Nach dem Urteil eines so ausgezeichneten Kenners der Platonischen Dialoge wie Ivo Bruns ist, ganz allgemein gesprochen, die Platonische Szene, wenn sie auch erfunden ist, »deshalb

nicht minder ihrem Gehalt nach historisch. Wohl ist sie erfunden, aber sie will erfunden sein im Geist der Wirklichkeit«. Und von den einzelnen in den Dialogen zur Darstellung kommenden Personen sagt er: »Alles, was sie tun oder sagen, ist, einzeln betrachtet, unhistorisch, ist Dichtung. Aber der Eindruck, den der Verfasser mit der Gesamtheit dieser Einzelheiten erzielen will, soll der historischen Wirklichkeit entsprechen. Und so oft uns die sonstige Überlieferung erlaubt, die Platonische Zeichnung zu kontrollieren, läuft sie der historischen Wahrheit nicht zuwider«²⁸.

H. Vogt hat in seiner »Entdeckungsgeschichte des Irrationalen«²⁹ die Frage, wie weit der Dialog »Theaetetus« als Geschichtsquelle anzusehen ist, nach allen Richtungen eingehend geprüft und kommt zum Ergebnis, daß die mathematische Stelle im »Theaetetus« als historische Quelle, namentlich als *Quelle für die Geschichte der Mathematik* zu werten ist. Insbesondere stellt er fest: »so dient die Einführung Theodors und die ganze mathematische Episode, äußerlich unhistorisch, der inneren historischen Treue«^{29a}. Indem nämlich Platon den Theaetetus über die letzten Entdeckungen von Theodoros berichten läßt, skizziert er in großen Zügen die Ausgangslage für Theaetetus weiterführende Entdeckungen und stellt so dem mathematisch gebildeten Leser dessen Leistungen eindringlich vor Augen.

Was die historische Treue betrifft, so pflichten die meisten Forscher der Auffassung H. Vogts bei. Zeuthen z. B. urteilt darüber in seiner Abhandlung über die arithmetischen Bücher in Euklids Elementen³⁰: »M. Vogt nous montre bien que, tout en étant une fiction poétique, le dialogue nous donne ici un véritable exposé historique des contributions apportées par Théodore de Cyrène et par Théétète à la découverte de l'irrationalité«. Herr Dijksterhuis ist gleichfalls der Meinung, daß man der Theodoros-Stelle sehr wahrscheinlich mathematisch-historische Bedeutung zuerkennen dürfe³¹. Und E. Sachs hat in ihrer Dissertation »De Theaeteto Atheniensi mathematico«³² alle Überlieferungen über Theaetetus Leben und Schriften sorgfältig miteinander verglichen und uns ein lebendiges Bild von der Persönlichkeit Theaetetus und seinem Anteil an der Entwicklung der Lehre vom Irrationalen vermittelt. In ihrem gleichzeitig mit der Dissertation verfaßten Buche »Die fünf Platonischen Körper«³³ weist sie nach, daß der Inhalt des XIII. Buches der Elemente Euklids im wesentlichen auf Theaetetus Entdeckungen beruht.

Nicht unerwähnt soll bleiben, daß so namhafte Vertreter der klassischen Philologie wie Ulrich von Wilamowitz-Moellendorff und Herr Werner Jäger sich bei ihren Untersuchungen über Theaetetus auf die Vorarbeiten von E. Sachs stützen. Herr Jäger urteilt über Theaetetus³⁴: »In der Akademie ist er eine bekannte Gestalt gewesen, wie Platos mit so großer

Sympathie gezeichnetes Bild des liebenswürdigen Gelehrten im »Theaitetos« beweist; gewiß ist es der persönlichen Wirkung des Vaters der Stereometrie zuzuschreiben, wenn Plato im »Staat« seinem Fach noch zu seinen Lebzeiten einen so ehrenvollen Platz anweist.

Wir können somit feststellen: *Der Mathematiker Theaitet, den uns Platon in dem gleichnamigen Dialog schildert, ist keine fingierte Persönlichkeit, wie neuerdings behauptet wurde³⁵, sondern hat wirklich existiert. Die Früchte seiner wissenschaftlichen Tätigkeit sind uns in Euklids Elementen, Buch X und XIII erhalten geblieben.*

Die sog. Theodoros-Stelle, welche für die mathematikgeschichtliche Forschung so aufschlußreich ist, lautet³⁶: *Περὶ δυνάμεων τι ἡμῖν Θεόδωρος ὁδε ἔγραφε, τῆς τε τρίποδος περὶ καὶ πεντέποδος [ἀποφαίνων] ὅτι μήκει οὐ σύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ, καὶ οὕτω κατὰ μίαν ἐκάστην προαιρούμενος μέχρι τῆς ἑπτακαιδεκάποδος · ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο.* In wortgetreuer Übersetzung: Über Quadrate zeichnete uns etwas Theodoros hier, wobei er von dem Quadrat mit drei und dem mit fünf Quadratfuß (Fläche) aufzeigte, daß sie der Länge nach nicht meßbar mit dem Einheitsquadrat seien, und (von den folgenden) jedes einzeln ebenso vornahm bis zu dem mit siebzehn Quadratfuß; bei diesem hörte er irgendwie auf.

Hermann Schmidt, dem wir zwei sehr ausführliche Kommentare zu Platons »Theaitet« verdanken³⁷, weist darauf hin³⁸, daß erst seit Stephanus sämtliche Herausgeber nach *πεντέποδος* ein Komma setzen. In den ältesten Ausgaben fehlt aber dieses Komma; dadurch werden die Worte *τῆς τε τρίποδος περὶ καὶ πεντέποδος* von *ἀποφαίνων* abhängig gemacht. H. Schmidt folgert hieraus, daß »Theodoros von den *δυνάμεις* überhaupt, den kommensurablen sowohl als den inkommensurablen, eine Zeichnung entworfen und an dieser zunächst von dem drei- und fünffüßigen Quadrat und dann von allen übrigen bis zum siebzehnfüßigen Quadrat das im Text Erwähnte gezeigt habe«. Dieser Auffassung, die H. Schmidt für die allein richtige hält, kann man im ganzen beipflichten. In der neuesten Oxford-Ausgabe von Platons Werken, der wir hier folgen, fehlt dieses Komma, welches Bekker noch bringt³⁹.

5. Der Beweisversuch des Theodoros.

Den Worten Theaitets dürfen wir entnehmen, daß Theodoros die Ergebnisse seiner eigenen Untersuchungen über irrationale Größen seinen Schülern mitgeteilt hat. Dieser Ansicht ist die Mehrzahl der Mathematikhistoriker, z. B. H. Vogt⁴⁰, H. G. Zeuthen⁴¹ und G. Junge⁴².

So erklärt es sich auch, daß Theodoros seinen Vortrag nicht mit $\sqrt{2}$

begonnen hat. Wahrscheinlich lag die Entdeckung der Irrationalität von $\sqrt{2}$ schon längere Zeit zurück, und Theodoros konnte ihre Kenntnis bei seinen Schülern ohne weiteres voraussetzen. H. Vogt⁴³ führt als tieferen Grund für das Fehlen von $\sqrt{2}$ an, daß Platon »den Theodoros nur seine eigene Entdeckung aussprechen lassen wollte, nicht das, was er von seinen Vorgängern überkommen hatte«. Auch diese Erklärung hat vieles für sich.

Offenbar hatte sich Theodoros die Aufgabe gestellt, den Begriff der Irrationalität zu erweitern. Zu diesem Zwecke untersuchte er systematisch Quadrate, die dreimal, fünfmal usw. so groß wie das Einheitsquadrat sind. Ist die Vergrößerungszahl 4, 9 oder überhaupt eine Quadratzahl, dann läßt sich sofort geometrisch nachweisen, daß die Seite des größeren Quadrats durch die Einheitsstrecke meßbar ist. Wie verhält es sich aber mit den Seiten der übrigen Quadrate? Sind deren Seiten mit der Einheitsstrecke meßbar oder nicht? Und läßt sich gegebenenfalls ihre Nichtmeßbarkeit beweisen, ähnlich wie im Falle der Inkommensurabilität der Quadratdiagonale?

Möglicherweise hatte Theodoros die Anregung zu seinen mathematischen Untersuchungen aus einem anderen Bereich der Pythagoreischen Lehre erhalten. In Platons »Timaeos« lesen wir, daß die Pythagoreer die sog. vier Elemente mit den regelmäßigen Polyedern (das Dodekaeder ausgenommen) in Zusammenhang gebracht haben⁴⁴. Die Begrenzungsflächen dieser Körper setzen sich aus zwei Arten von Dreiecken zusammen: aus rechtwinklig-gleichschenkligen und rechtwinklig-ungleichschenkligen Dreiecken. Die letztere Art wird beschrieben als: *τὸ δὲ τριπλῆν κατὰ δύναμιν ἔχον τῆς ἐλάττονος τὴν μείζω πλευρὰν ἀεί*⁴⁵. Damit ist ein Dreieck gemeint, welches man durch Halbieren des gleichseitigen Dreiecks ABC (Fig. 3) erhält: Im Dreieck ACD ist das Quadrat über der größeren Kathete dreimal so groß wie das Quadrat über der kleineren.

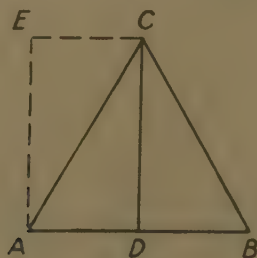


Fig. 3.

Nachdem nun für die Dreiecke der ersten Art die Inkommensurabilität der Hypotenuse mit der Kathete nachgewiesen war, lag es nahe, diese Betrachtung auch auf jene zweite Art von Dreiecken auszudehnen. So kam Theodoros vielleicht zur Untersuchung von $\sqrt[3]{3}$, an die sich dann die weiterführenden Betrachtungen anschlossen.

Nach Theaetets Bericht hat Theodoros seinen Vortrag durch das Zeichnen von Figuren (*ἐγγραφε*) erläutert. Er hat sich also bei seinen Ausführungen der *geometrischen* Methode bedient. Hierauf weist – gegenüber früheren Deutungsversuchen – als erster Zeuthen mit allem Nachdruck hin⁴⁶.

Die Vermutung liegt natürlich nahe, daß Theodoros versucht hat, das *geometrische Beweisverfahren*, welches bei $\sqrt{2}$ zum Ziele geführt hatte, auch bei $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{5}$ usw. anzuwenden. Der geometrische Beweis für die Inkommensurabilität der Quadratdiagonale setzte eine Folge von Quadraten voraus, die sich nach einer einfachen Vorschrift konstruieren ließen. Wollte Theodoros dieses Verfahren auf die Fälle $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{5}$ usw. ausdehnen, so ergab sich sofort die Schwierigkeit, daß er es künftig nicht mehr mit Quadraten, sondern mit Rechtecken zu tun hatte. Und eine weitere Komplikation trat bei der Untersuchung des dreifachen Quadrats auf. Hier mußte er von einem Rechteck *ADCE* (Fig. 3) mit der kleineren Seite 1 und mit der Diagonale 2 ausgehen. Während beim Beweis im Falle von $\sqrt{2}$ die *Diagonale* des Quadrats mit der Seite auf ihre Meßbarkeit hin verglichen wurde, hatte er jetzt im Rechteck die *größere Seite* mit der kleineren zu vergleichen.

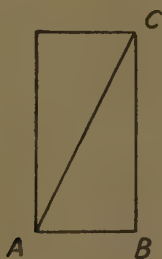


Fig. 4.

Günstiger lagen die Verhältnisse bei der Untersuchung des fünffachen Quadrats. Hier mußte man von einem Rechteck mit den Seiten 1 und 2 ausgehen (Fig. 4); das Quadrat über der Diagonale ist also fünfmal so groß wie das Quadrat über der kleineren Seite. Theodoros hatte also ähnlich wie »beim Musterbeispiel der Quadratdiagonale« festzustellen,

ob die *Diagonale* und die kleinere Seite ein gemeinsames Maß besitzen.

Diese Überlegungen zeigen, daß $\sqrt{3}$ und $\sqrt{5}$ hinsichtlich des Beweises die typischen Vertreter zweier Gruppen von Irrationalitäten sind. Im Rechteck, welches dem Beweis zugrunde gelegt wird, ist das eine Mal die *größere Seite*, das andere Mal die *Diagonale* auf ihre Meßbarkeit mit der kleineren Seite, der Einheitsstrecke, zu prüfen. Ist die Untersuchung für diese beiden Fälle durchgeführt, dann bereitet, wie sich zeigen wird, die Beweisführung bei den anderen Irrationalitäten keine Schwierigkeiten mehr, sobald man sie in eine der beiden Gruppen eingeordnet hat.

Es ist gut denkbar, daß diese Aufspaltung des Problems in zwei Beweisgruppen Theodoros veranlaßt hat, zunächst die Quadrate mit 3 und 5 Quadratfuß Fläche eingehender zu behandeln, und sich dann darauf zu beschränken, die weiteren Quadrate in eine dieser Gruppen einzuordnen.

Hieraus erklärt sich zwanglos der Wortlaut des Berichts, wonach Theaetet das dreifache und das fünffache Quadrat besonders anführt und von den übrigen nur ganz kurz sagt, daß der Nachweis ihrer Irrationalität auch »auf diese Weise« (οὕτω) erbracht wurde.

Es mag dahingestellt bleiben, ob Theodoros zuerst $\sqrt{3}$ oder $\sqrt{5}$ behandelt hat. Aus didaktischen Gründen empfiehlt es sich jedenfalls, mit $\sqrt{5}$ zu beginnen; denn dieser Beweis gehört zur nämlichen Gruppe wie der von $\sqrt{2}$: in beiden Fällen ist die Diagonale (des Quadrats bzw. Rechtecks) mit der Einheitsstrecke zu vergleichen. Diese Beweisgruppe soll künftig als die 1. Gruppe bezeichnet werden. Der Beweis zu $\sqrt{3}$ ist dann das Musterbeispiel für die 2. Gruppe.

Wir beginnen mit $\sqrt{5}$ und legen dem Beweis, wie schon gesagt wurde, das Rechteck mit der kleineren Seite $a = 1$ und mit der größeren $b = 2$ zugrunde. Alles hängt nun davon ab, daß es gelingt, in Anlehnung an den Musterbeweis bei $\sqrt{2}$ jetzt eine Folge von Rechtecken zu konstruieren, deren Glieder folgenden Bedingungen genügen:

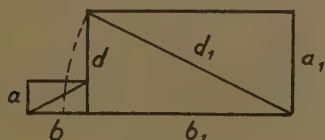
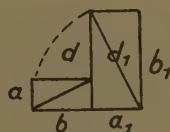
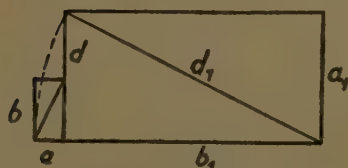
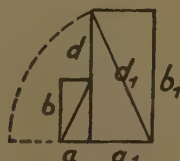
1. Die Seiten sollen bei allen Rechtecken in dem gleichen ganzzahligen Verhältnis stehen. Dies entspricht der früheren Forderung, daß die Folge aus Quadraten (Seitenverhältnis 1:1) besteht.
2. Die Seite eines Rechtecks ist gleich der Summe aus der Diagonale und einer Seite des vorhergehenden Rechtecks (entsprechend der früheren Forderung $s_n = s_{n-1} + d_{n-1}$).
3. Die Diagonale eines Rechtecks ist gleich der Summe aus einer Seite dieses Rechtecks und einer Seite des vorhergehenden Rechtecks (entsprechend der früheren Forderung $d_n = s_n + s_{n-1}$).

4. Eine Seite eines Rechtecks ist größer als das Doppelte der entsprechenden Seite des vorhergehenden Rechtecks (entsprechend der früheren Forderung $s_{n-1} < \frac{1}{2} \cdot s_n$ oder $s_n > 2 \cdot s_{n-1}$).

Weil hierbei aber noch die Wahl zwischen der kleineren und der größeren Seite eines Rechtecks und des ihm vorangehenden Rechtecks offen steht, kann die zweite Bedingung folgende vier verschiedenen Formen annehmen:

$$1) a_1 = a + d \quad 2) a_1 = b + d \quad 3) b_1 = a + d \quad 4) b_1 = b + d.$$

Mit Rücksicht darauf, daß immer $a : b = 1 : 2$ ist, ergeben sich nun aus der zweiten Bedingung folgende vier Möglichkeiten für die Konstruktion eines neuen Rechtecks (Fig. 5, 6, 7, 8):

Fig. 5. $a_1 = a + d$ Fig. 7. $b_1 = a + d$ Fig. 6. $a_1 = b + d$ Fig. 8. $b_1 = b + d$

In allen Fällen genügt das neue Rechteck zufolge der Konstruktion der ersten und zweiten Bedingung. Wie ein Blick auf die Figuren 5 bis 8 lehrt, ist aber im ersten und letzten Falle die dritte Bedingung für Diagonale d_1 nicht erfüllt. Auch wenn man in Fig. 5 und 8 das neue Rechteck nach einer Drehung um 90° neben das alte Rechteck stellt, läßt sich dies nicht erreichen. Dagegen wird die dritte Bedingung im Falle 2) und 3) erfüllt. Dies läßt sich auf eine etwas umständliche Weise mittels Flächenvergleichung und ohne Benutzung von ähnlichen Figuren nachweisen. Vielleicht konnte aber Theodoros, etwa im Falle 2), auch folgenden kürzeren Weg einschlagen.

Im Anfangsrechteck $ABCD$ ist (Fig. 9) $AB = a$, $BC = b = 2a$ und $AC = d$. Man macht $BE = a_1 = b + d$ und $BF = b_1 = 2a_1$. Zum Beweis, daß $EF = d_1 = a + b_1$ ist, verlängert man AC bis zum Schnitt H mit

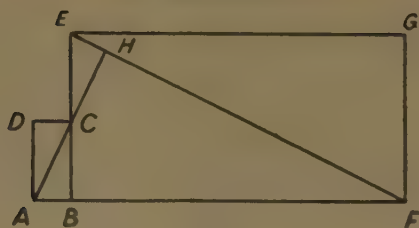


Fig. 9.

EF . Dann ist in den Dreiecken ABC und EBF nach Euklid VI,6 $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BEF$. Der hier benutzte Satz: Wenn zwei Dreiecke in einem Winkel übereinstimmen und die Seiten, welche die gleichen Winkel einschließen, in gleichem Verhältnis stehen, so sind die Dreiecke winkelgleich, war zu Theodoros' Zeit sicherlich schon bekannt und konnte damals für *ganzzahlige* Seitenverhältnisse, wie sie hier vorliegen, auch streng bewiesen werden. Nun folgt aus der Kongruenz der Dreiecke ABC und EHC (wsw) zunächst $\sphericalangle AHF = \sphericalangle EBF = 90^\circ$ und dann wegen $AH = EB$ die Kongruenz der Dreiecke AHF und EBF (wsw). Hieraus ergibt sich schließlich $EF = AF$, d. h. $d_1 = a + b_1$.

Schließlich sind die Konstruktionen von Fig. 6 und Fig. 7 auf die vierte Bedingung hin zu prüfen. Im Falle der Fig. 6 ist diese Bedingung erfüllt; denn wegen $d > b$ ist $a_1 > 2b$, und wegen $b > a$ ist um so mehr $a_1 > 2a$ oder $a < \frac{1}{2}a_1$. Dagegen kann man im Falle von Fig. 7 nachweisen, daß $a_1 < 2a$ ist, daß also die vierte Bedingung nicht erfüllt wird.

Es kommt somit nur der Fall 2) für die Konstruktion eines neuen Rechtecks in Betracht. Die Konstruktion erfolgt nach der Vorschrift: $b = m \cdot a$; $a_1 = b + d$; $b_1 = m \cdot a_1$ ($m = \text{pos. ganze Zahl}$). Dann ergibt sich $d_1 = b_1 + a$ und $a < \frac{1}{2}a_1$.

An das neue Rechteck kann man in gleicher Weise immer wieder Rechtecke anfügen und erhält so eine Folge immer *größer* werdender Rechtecke, deren Seiten und Diagonalen den Bedingungen genügen:

$$a_n = b_{n-1} + d_{n-1} \text{ und } d_n = b_n + a_{n-1} \quad (5)$$

Es bedarf wohl kaum der Bemerkung, daß Theodoros diese Einzeluntersuchungen seinen Schülern schwerlich vorgetragen hat. Vielleicht hat er selbst die Konstruktion dieser Rechtecksfolge nur *durch Probieren* gefunden. Es genügte, wenn er in seinem Vortrag lediglich die Vorschrift für die Konstruktion mitteilte.

Wie beim Beweis für die Inkommensurabilität der Quadratdiagonale

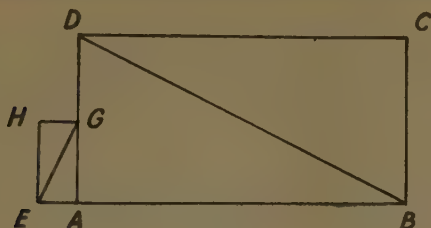


Fig. 10.

läßt sich auch hier umgekehrt eine Folge immer kleiner werdender Rechtecke konstruieren. Aus den Gl. (5) folgt nämlich:

$$a_{n-1} = d_n - b_n \text{ und } d_{n-1} = a_n - b_{n-1}. \quad (6)$$

Trägt man demnach im Rechteck $ABCD$ (Fig. 10) die Diagonale $BD = d_n$ auf der Seite $AB = b_n$ und ihrer Verlängerung ab, so ist die überschießende Strecke AE die kleinere Seite des nächsten Rechtecks. Konstruiert man jetzt mittels des gegebenen *ganzzahligen* Seitenverhältnisses dieses Rechteck $AEHG$, so ist $GD = GE = d_{n-1}$. Auch ist, wie oben gezeigt wurde, $a_{n-1} < \frac{1}{2}a_n$.

Zum Beweis, daß die Diagonale BD und die Seite AD inkommensurabel sind, hat man nach Euklid X,2 zunächst die kleinere Seite $AD = a_n$ so oft wie möglich von der Diagonale $BD = d_n$ abzuziehen. Da $BE = BD$ und $AB = 2 \cdot AD$ ist, so stellt $AE = a_{n-1}$ den Rest dar, den man beim ersten Abziehen erhält. Dieser Rest ist jetzt von AD so oft wie möglich abzuziehen. Nun ist aber $AG = b_{n-1} = 2 \cdot a_{n-1}$. Daher ist a_{n-1} nur noch von GD abzuziehen. Und weil $GD = GE = d_{n-1}$ ist, sieht man sich also vor die Aufgabe gestellt, im nächstkleineren Rechteck $AEHG$ die nämliche Operation vorzunehmen wie anfangs im Rechteck $ABCD$, nämlich die kleinere Seite a_{n-1} so oft wie möglich auf der Diagonale d_{n-1} abzutragen und den Rest zu bestimmen. Dieser Rest ist natürlich die Seite a_{n-2} des nächsten Rechtecks, und so läßt sich dieses Verfahren offenbar beliebig fortsetzen.

Nun werde angenommen, d_n und a_n seien kommensurabel und besäßen die kleine Strecke ε als gemeinsames Maß. Weil $a_{k-1} < \frac{1}{2} \cdot a_k$ ($k \geq n$) ist, läßt sich die Wechselwegnahme zwischen d_n und a_n so lange fortsetzen, bis man schließlich ein Rechteck mit der Seite $a_0 < \varepsilon$ erhält. ε mißt aber nicht nur a_n und d_n , sondern auch die Seiten und Diagonalen aller folgenden Rechtecke. Daher mißt ε die Seite a_0 , die aber doch kleiner als ε ist. Dies führt zum Widerspruch. Also ist d_n inkommensurabel zu a_n .

Das hier gegebene Beweisverfahren läßt sich bei allen Rechtecken anwenden, deren Seiten das Verhältnis $a : b = 1 : m$ ($m = \text{pos. ganze Zahl}$) besitzen. Es führt auch dann zum Ziel, wenn das Verhältnis der Rechteckseiten $a : b = p : q$ ist, wo $p < q$ ist und p und q teilerfremde positive ganze Zahlen sind.

Der Nachweis für die Irrationalität von $\sqrt{3}$ bedingt nur eine geringfügige Abänderung des eben geschilderten Beweisverfahrens. Die Vorschrift für die Konstruktion der Folge der immer größer werdenden Rechtecke bleibt im wesentlichen unverändert. Nur ist zu beachten, daß jetzt die *Diagonale* des jeweiligen Rechtecks das Doppelte (allgemein das m -fache) der kleineren Seite ist. Es ist also (Fig. 9) im Anfangsrechteck $ABCD$ die Diagonale $AC = d = 2a$ und im nächstgrößeren Rechteck $BEGF$ die Diagonale $EF = d_1 = 2a_1$. Verlängert man wieder AC bis zum Schnitt H mit EF , so läßt sich in den Dreiecken ABC und EBF die Gleichheit der Winkel BAC und BEF mittels Euklid VI,7 nachweisen: Wenn zwei Dreiecke in einem Winkel übereinstimmen und die Seiten, welche einen anderen Winkel einschließen, in gleichem Verhältnis stehen und von dem dritten Winkelpaar jeder zugleich entweder kleiner oder nicht kleiner als ein Rechter ist, so sind die Dreiecke winkelgleich. Nun folgt wie früher $EF = AF$, d. h. $d_1 = a + b_1$.

Durch Wiederholung der Konstruktion entsteht eine Folge immer größerer Rechtecke. Wie früher kann man auch hier zu einer Folge immer kleinerer Rechtecke gelangen, indem man (Fig. 11) von einem Rechteck $ABCD$ ausgeht, dessen Diagonale $BD = d_n$ doppelt so groß wie die kleinere Seite $AD = a_n$ ist, und den Überschuß der Diagonale BD über die Seite $AB = b_n$ bildet; man erhält so die Seite $AE = a_{n-1}$ des nächstkleineren Rechtecks. Durch die Diagonale $EF = 2 \cdot AE$ oder $d_{n-1} = 2 \cdot a_{n-1}$ ist die Ecke F des kleineren Rechtecks bestimmt. Nun ist $AF = b_{n-1}$ und $FD = FE = d_{n-1}$. Auch ist die Bedingung $a_{n-1} < \frac{1}{2} \cdot a_n$ erfüllt.

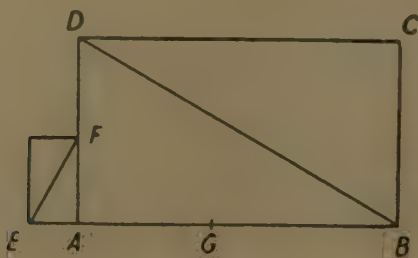


Fig. 11.

Nun wird auf die Strecken $AB = b_n$ und $AD = a_n$ das Verfahren der Wechselwegnahme angewandt. Man trägt auf AB die Seite $a_n = BG$ ab. Weil $BE = 2a_n$ ist, entsteht so der erste Rest AG , der jetzt auf a_n abzutragen ist. GE ist aber gleich a_n ; auch ist $AE = a_{n-1} < \frac{1}{2} \cdot a_n$, also $AG > \frac{1}{2} \cdot a_n$. Somit ist AE der zweite Rest. AE ist nun auf AG möglichst oft abzutragen und der verbleibende Rest zu bestimmen. Ich erhalte das gleiche Ergebnis, wenn ich statt AG die um a_{n-1} vergrößerte Strecke EG und statt dieser die gleichgroße Strecke AD nehme. Nun ist aber die Seite a_{n-1} ein Teiler von $DF = d_{n-1}$; sie ist in ihr zweimal enthalten. Ich finde also den nächsten Rest durch Abtragen von a_{n-1} auf $AF = b_{n-1}$. Es ist somit, wie im Anfangsrechteck, jetzt im kleineren Rechteck die Operation der Wechselwegnahme auf die größere und kleinere Seite anzuwenden. Nach zweimaligem Abtragen erhält man daher als vierten Rest die Seite a_{n-2} . Das Verfahren läßt sich so lange fortsetzen, bis man zu einem Rechteck mit der Seite $a_0 < \varepsilon$ gelangt, wo ε das gemeinsame Maß von a_n und b_n sein soll, falls diese Strecken kommensurabel wären. Wie beim Beweis der ersten Gruppe führt dies zum Widerspruch; denn die kleinere Strecke a_0 kann nicht von der größeren ε gemessen werden. Damit ist der geometrische Beweis erbracht, daß $\sqrt{3}$ irrational ist.

Auf diese Weise läßt sich bei allen Rechtecken, deren Diagonale das m -fache (m gleich einer pos. ganzen Zahl) der kleineren Seite ist, der Nachweis führen, daß die größere Seite inkommensurabel ist.

Mit der Durchführung dieser beiden Beweise für $\sqrt{5}$ und $\sqrt{3}$ war für Theodoros die Hauptarbeit getan. Bei den folgenden Quadratwurzeln konnte er sich darauf beschränken, die Beweise in eine der beiden Beweisgruppen einzuordnen. Hierzu mußte er die zweckmäßigsten Abmessungen für das Anfangsrechteck ermitteln, das dem Beweis zugrunde zu legen war. Dies erforderte noch eine weitere Überlegung.

Gleich bei der nächsten Quadratwurzel $\sqrt{6}$ läßt sich ja der Radikand 6 nicht in der Form $n^2 \pm 1$ darstellen. Dies gelingt erst, nachdem man 6 mit einer geeigneten Quadratzahl multipliziert hat: $4 \cdot 6 = 24 = 5^2 - 1$. Beim Rechteck mit der Seite $a = 1$ und der Diagonale $d = 5$ ist das Quadrat über der größeren Seite das 24-fache des Einheitsquadrats. Die Untersuchung von $\sqrt{6}$ gehört also zur zweiten Beweisgruppe. Das 24-fache Quadrat läßt sich leicht (durch die Mittellinien) in vier gleichgroße Quadrate, jedes gleich dem 6-fachen des Einheitsquadrats, zerlegen (Fig. 12). Da hiernach $\sqrt{6} = \frac{1}{2} \sqrt{24}$ ist, so folgt die Irrationalität von $\sqrt{6}$ sofort aus dem Nachweis, daß $\sqrt{24}$ irrational ist.

Wie das Beispiel $2\sqrt{6} = \sqrt{24}$ zeigt, ist die Ableitung dieser Identität

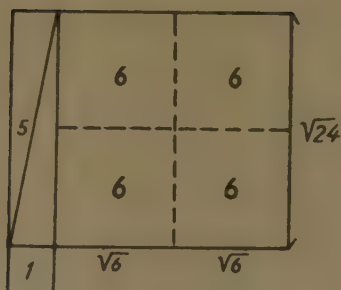


Fig. 12.

so einfach, daß wir den Pythagoreern unbedenklich die Kenntnis der allgemeinen Identität $p\sqrt{m} = \sqrt{p^2 \cdot m}$ zuschreiben dürfen. Dieser Meinung sind auch die Herren H. Hasse und H. Scholz in ihrer Abhandlung »Die Grundlagenkrise der griechischen Mathematik«⁴⁷.

In ähnlicher Weise geht man beim Beweis

von $\sqrt{7}$ zurück auf $3 \cdot \sqrt{7} = \sqrt{8^2 - 1}$ (2. Gr.)

„ $\sqrt{8}$ „ „ $\sqrt{3^2 - 1}$ (2. Gr.)

„ $\sqrt{10}$ „ „ $\sqrt{3^2 + 1}$ (1. Gr.)

„ $\sqrt{11}$ „ „ $3 \cdot \sqrt{11} = \sqrt{10^2 - 1}$ (2. Gr.)

„ $\sqrt{12}$ „ „ $2 \cdot \sqrt{12} = \sqrt{7^2 - 1}$ (2. Gr.)

„ $\sqrt{13}$ „ „ $5 \cdot \sqrt{13} = \sqrt{18^2 + 1}$ (1. Gr.)

„ $\sqrt{14}$ „ „ $4 \cdot \sqrt{14} = \sqrt{15^2 - 1}$ (2. Gr.)

„ $\sqrt{15}$ „ „ $\sqrt{4^2 - 1}$ (2. Gr.)

„ $\sqrt{17}$ „ „ $\sqrt{4^2 + 1}$ (1. Gr.)

Sieht man von der einschränkenden Bedingung $a = 1$ ab, so kann man in manchen Fällen den Beweis einfacher gestalten.

Bei $\sqrt{8}$ z. B. käme das Quadrat mit der Seite $a = 2$ in Betracht. Seine Diagonale $d = \sqrt{8}$ wird sofort als inkommensurabel mit der Seite $a = 2$ und daher auch mit der Einheitsstrecke erkannt. Oder man führt den Fall mittels der Identität $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ auf den Beweis für $\sqrt{2}$ zurück.

$\sqrt{12}$ läßt sich auf $2\sqrt{3}$ zurückführen.

$\sqrt{13}$ kann als die Diagonale des Rechtecks mit den Seiten $a = 2$ und $b = 3$ aufgefaßt werden. Der Beweis gehört zur ersten Gruppe.

Zu den hier entwickelten Beweisen für die Irrationalität von $\sqrt{3}$ bis $\sqrt{17}$ sei abschließend noch einmal festgestellt, daß die vorstehenden Aus-

führungen nicht etwa den vollständigen Inhalt des Vortrages von Theodoros bis in alle Einzelheiten wiedergeben sollen. Hier kam es vor allem darauf an, zu zeigen, daß um das Jahr 400 v. Chr. sich der geometrische Beweis für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ wirklich auf die folgenden Quadratwurzeln aus Nichtquadratzahlen übertragen ließ und daß dabei nur diejenigen Schlußfolgerungen verwendet zu werden brauchten, deren man sich in jener Zeit vermutlich bediente und die wahrscheinlich in den damaligen Lehrbüchern, den Vorläufern der Elemente Euklids, enthalten waren.

Insbesondere wurde hierbei von Proportionen nur insoweit Gebrauch gemacht, als es sich einwandfrei um *ganzzahlige Verhältnisse* handelte. Lehrsätze über ähnliche Figuren wurden nicht verwendet. Denn wir dürfen doch wohl als gewiß annehmen, daß Theodoros das Versagen der alten Proportionslehre für irrationale Größen erkannt hatte. *Er durfte also rationale Größen nicht mit Größen ins Verhältnis setzen, die der Irrationalität auch nur verdächtig waren.*⁴⁸

6. Berechnung von Näherungswerten.

Wie eingangs erwähnt wurde, haben die Pythagoreer aus den Reihen der Seiten und Durchmesser von Quadraten die sog. *Seiten- und Durchmesserzahlen* abgeleitet. Nach den übereinstimmenden Berichten des Proklos⁴⁹ und des Theon⁵⁰ legten sie in einem Anfangsquadrat der Seite und der Diagonale den Wert »Eins« bei und berechneten dann unter Benutzung der geometrischen Zusammenhänge (Gl. 1) die Seiten und Diagonalen der folgenden Quadrate. Dieses sonderbare »Beginnen«, das aber zu dem gewünschten Erfolg führte, verlangte natürlich eine Erklärung, und eine solche fanden die Pythagoreer in ihrer Vorstellung vom Wesen der *μονάς*, die sie mit einem Samenkorn verglichen; wie dieses alle Eigenschaften des künftigen Lebewesens bereits in sich enthalte, so sei die Einheit fähig, das Verhältnis des Durchmessers zur Seite eines Quadrats aus sich heraus zu erzeugen. Theon gibt der Begründung folgenden Ausdruck: *ὥσπερ οὖν πάντων τῶν σχημάτων κατὰ τὸν ἀνωτάτω καὶ σπερματικὸν λόγον ἡ μονὰς ἄρχει, οὕτως καὶ τῆς διαμέτρου καὶ τῆς πλευρᾶς λόγος ἐν τῇ μονάδι εὐρίσκεται.* (Wie die Einheit bei allen Dingen gemäß dem obersten und dem ähnlich einem Samenkorn weiterwirkenden Verhältnis (Denkvermögen) am Anfang steht, so wird auch das Verhältnis vom Durchmesser zur Seite in der Einheit gefunden). Proklos sagt kürzer (a. a. O., S. 24): *ἐπεὶ γὰρ ἡ μονὰς πάντα ἐστὶν σπερματικῶς, ὁῦλον, φασίν, ὅτι καὶ πλευρὰ ἐστὶν καὶ διάμετρος.* (Da nämlich die Einheit sich durchaus wie ein Samenkorn

verhält, so sei es offenbar, behaupten sie (nämlich die Pythagoreer), daß sich auch Seite und Durchmesser so verhielten).

Beide Kommentatoren führen die Rechnung für die ersten vier Quadrate durch und finden:

Quadrat	s	d	$2 \cdot s^2$	d^2	$2 \cdot s^2 - d^2$
1.	1	1	$2 \cdot 1 = 2$	1	+ 1
2.	$1 + 1 = 2$	$2 + 1 = 3$	$2 \cdot 4 = 8$	9	- 1
3.	$2 + 3 = 5$	$5 + 2 = 7$	$2 \cdot 25 = 50$	49	+ 1
4.	$5 + 7 = 12$	$12 + 5 = 17$	$2 \cdot 144 = 288$	289	- 1

Sie fügen hinzu, daß man diese Doppelreihe beliebig weit fortsetzen könne.

Es ist wohl kaum anzunehmen, daß die Pythagoreer bei ihren Untersuchungen sofort auf den Einfall kamen, der Seite und der Diagonale eines Quadrats den Zahlenwert 1 beizulegen. Ob man damals bereits mit dem Begriff »Näherungswert« operierte, womit sich ihr Verfahren allenfalls erklären ließ, entzieht sich unserer Kenntnis; es ist aber sehr unwahrscheinlich, da die Griechen bewußt »Präzisionsmathematik« trieben. Auch eine sprachliche Ausdrucksform für »Näherungswert« ist uns aus jener Zeit, soweit ich sehe, nicht überliefert. Erst in der »Kreismessung« des Archimedes findet sich einmal die Wendung⁵¹: *ἐπεὶ . . . ἡ δὲ βᾶσις τῆς διαμέτρου τριπλασίων καὶ τῷ ἑγγίστα ὑπερέρχονσα δειχθήσεται*. Heiberg bezeichnet die Stelle allerdings als Interpolation und als »locus mire confusus«; der Sinn ist etwa der: . . . da von der Grundlinie gezeigt werden soll, daß sie so nahe als möglich das 3½-fache des Durchmessers ist.

Bei ihren Bemühungen, das Verhältnis der Diagonale zur Quadratseite zu bestimmen, sind die alten Griechen vermutlich auf den Begriff des »aussprechbaren Durchmessers« gekommen. Wahrscheinlich haben sie durch Probieren gefunden, daß im Quadrat mit der Seite gleich 5 die Diagonale nahezu gleich 7 ist. Von diesem Quadrat, das gewiß schon lange vor Platon bekannt war⁵², konnten sie leicht zu dem nächstkleineren Quadrat mit der Seite 2 und der »aussprechbaren« Diagonale 3 und dann zum Quadrat mit der Seite 1 und der »aussprechbaren« Diagonale 1 gelangen. Diese Entdeckung hat sie in ihrer mystischen Auffassung vom Wesen der *μονάς* bestärkt und konnte sie veranlaßt haben, nachträglich den Ausgangspunkt ihrer Berechnung mit dem *σπερματικὸς λόγος* der »Einheit« zu begründen. Dabei kann der Konstruktionsvorgang, der vom größeren zum kleineren Quadrat führte, durch den Versuch eingeleitet worden sein, mittels des Abtragens der Quadratseite auf der Diagonale und

mittels weiterer Wechselwegnahme Klarheit über das Verhältnis der Diagonale zur Seite des Quadrats zu gewinnen.

Die aufsteigende Doppelreihe der Seiten- und Durchmesserzahlen besitzt, wie Proklos⁵³ und Theon⁵⁴ feststellen, die Eigentümlichkeit, daß das Quadrat der Durchmesserzahl abwechselnd nur um 1, also um das Minimum, größer oder kleiner ist als das doppelte Quadrat der zugehörigen Seitenzahl. Aus Gl. (1) folgt in der Tat:

$$\begin{aligned} 2 \cdot s_n^2 - d_n^2 &= 2 \cdot (s_{n-1} + d_{n-1})^2 - (2 \cdot s_{n-1} + d_{n-1})^2 \\ &= - (2 \cdot s_{n-1}^2 - d_{n-1}^2) \\ &= + (2 \cdot s_{n-2}^2 - d_{n-2}^2) \text{ usw.} \end{aligned}$$

bis zur Differenz des Anfangsquadrats, für die man $2 \cdot s_1^2 - d_1^2 = 1$ erhält.⁵⁵

Das Verhältnis des »unaussprechbaren« Durchmessers zur Quadratseite — wir schreiben dafür kurz $\sqrt{2}$ — war natürlich auch unaussprechbar. Als Behelf diente das Verhältnis zwischen dem »aussprechbaren« Durchmesser und der Seite. Aristarch von Samos (310–230 v. Chr.) z. B. hat in seiner Abhandlung »Über die Größe und die Entfernung von Sonne und Mond« die Ungleichung $\sqrt{2} > \frac{1}{2}$ benutzt.

Je weiter man in der Doppelreihe der Seiten- und Durchmesserzahlen vorwärts schreitet, um so geringer wird der relative Unterschied zwischen dem »aussprechbaren« Verhältnis von Durchmesser zur Seite einerseits und dem Werte von $\sqrt{2}$ andererseits.

So entwickelte sich also damals ein Verfahren, mittels der Verwendung der »aussprechbaren« Durchmesser immer genauer werdende *Näherungswerte* für $\sqrt{2}$ zu berechnen, wenn auch zunächst noch kein Wort für diesen neuen Begriff geprägt wurde.

Für $\sqrt{2}$ erhält man aus der Doppelreihe der Seiten- und Durchmesserzahlen die Näherungswerte:

$z_1 = 1$	$z_2 = 3 : 2 = 1,5$
$z_3 = 7 : 5 = 1,4$	$z_4 = 17 : 12 = 1,41667$
$z_5 = 41 : 29 = 1,41379$	$z_6 = 99 : 70 = 1,41429$
$z_7 = 239 : 169 = 1,41420$	$z_8 = 577 : 408 = 1,414215$

Hierbei sind die links stehenden Werte kleiner, die rechts stehenden aber größer als $\sqrt{2}$. Auf diese Art wird $\sqrt{2}$ in immer engere Grenzen eingeschlossen.

Daß um 400 v. Chr. Interesse an den Näherungswerten für $\sqrt[4]{2}$ bestand, beweisen die Untersuchungen des Archytas von Tarent (428 bis 365 v. Chr.); mit Hilfe der bei der musikalischen Proportion auftretenden arithmetischen und harmonischen Mittel entwickelte dieser ein erheblich rascher konvergierendes Verfahren zur angenäherten Berechnung von $\sqrt[4]{2}$; so erhielt er z. B. den Wert $z_8 = 577 : 408$ bereits als das 3. Glied in seiner Näherungsreihe.

Wir dürfen wohl als ziemlich sicher annehmen, daß schon zu Theodoros' Zeit die Doppelreihe der Seiten- und Durchmesserzahlen zur Berechnung von Näherungswerten für $\sqrt[4]{2}$ verwendet wurde. Nachdem nun die *geometrischen* Untersuchungsmethoden von $\sqrt[4]{2}$ auf $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[4]{5}$ usw. übertragen waren, wird man das Gleiche auch mit dem Rechenverfahren versucht haben, um Näherungswerte für die folgenden Quadratwurzeln zu erhalten.

Bei $\sqrt[4]{5}$, dem Repräsentanten der ersten Gruppe, geht man von einem Rechteck mit den Seitenzahlen $a_1 = 1$ $b_1 = 2 \cdot a_1 = 2$ aus und führt statt der »unaussprechbaren« Diagonale $\sqrt[4]{5}$ den »aussprechbaren« Näherungswert $d_1 = 2$ ein. Es wird also $a_1^2 + b_1^2 = 1 + 4 = 5$, $d_1^2 = 4$; die Summe der Quadrate der Seitenzahlen ist demnach um die Einheit (das Minimum) *größer* als das Quadrat über der »aussprechbaren« Diagonale.

Für das zweite Rechteck folgt aus Gl. (4):

$$a_2 = b_1 + d_1 = 4, \quad b_2 = 2 \cdot a_2 = 8, \quad d_2 = b_2 + a_1 = 9; \text{ mithin} \\ a_2^2 + b_2^2 = 16 + 64 = 80; \quad d_2^2 = 81.$$

Die Summe der Seitenquadrate ist also jetzt um 1 *kleiner* als das Quadrat über der »aussprechbaren« Diagonale. In dieser Weise kann man fortfahren und erhält für $\sqrt[4]{5}$ die Zusammenstellung:

Rechteck	a	b	d	$a^2 + b^2$	d^2	Diff.
1.	1	$1 \cdot 2 = 2$	2	$1 + 4 = 5$	4	+1
2.	$2 + 2 = 4$	$4 \cdot 2 = 8$	$8 + 1 = 9$	$16 + 64 = 80$	81	-1
3.	$8 + 9 = 17$	$17 \cdot 2 = 34$	$34 + 4 = 38$	$289 + 1156 = 1445$	1444	+1
4.	72	144	161	25920	25921	-1
5.	305	610	682	465125	465124	+1
6.	1292	2584	2889	8346320	8346321	-1

Die Nährungswerte sind demnach:

$$z_1 = 2 : 1 = 2$$

$$z_2 = 9 : 4 = 2,25$$

$$z_3 = 38 : 17 = 2,23529$$

$$z_4 = 161 : 72 = 2,23611$$

$$z_5 = 682 : 305 = 2,236066$$

$$z_6 = 2889 : 1292 = 2,236068.$$

Die Doppelreihe der Seiten- und Durchmesserzahlen bei $\sqrt{5}$ besitzt also die nämliche Eigenschaft wie die bei $\sqrt{2}$ auftretende Doppelreihe: das Quadrat der Durchmesserzahl ist abwechselnd um 1 größer oder kleiner als die Summe der Quadrate der Seitenzahlen. Es läßt sich zeigen, daß dies allgemein für die Doppelreihen aller Quadratwurzeln gilt, die zur ersten Gruppe gehören.

Geht man von einem Rechteck mit den Seitenzahlen a_n und $b_n = m \cdot a_n$ ($m = \text{pos. ganze Zahl}$) und mit der Diagonalzahl d_n aus, so ist vermöge Gl. (5):

$$a_n = b_{n-1} + d_{n-1} = m \cdot a_{n-1} + d_{n-1}; \quad b_n = m \cdot a_n = m \cdot (m \cdot a_{n-1} + d_{n-1}); \\ d_n = b_n + a_{n-1} = (1 + m^2) \cdot a_{n-1} + m \cdot d_{n-1}.$$

Daher wird:

$$\begin{aligned} a_n^2 + b_n^2 - d_n^2 &= (1 + m^2) \cdot (m \cdot a_{n-1} + d_{n-1})^2 - [(1 + m^2) \cdot a_{n-1} + m \cdot d_{n-1}]^2 \\ &= (1 + m^2) \cdot (m^2 \cdot a_{n-1}^2 + d_{n-1}^2) - (1 + m^2)^2 \cdot a_{n-1}^2 - m^2 \cdot d_{n-1}^2 \\ &= - (1 + m^2) \cdot a_{n-1}^2 + d_{n-1}^2 \\ &= - (a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2 - d_{n-1}^2) \\ &= + (a_{n-2}^2 + b_{n-2}^2 - d_{n-2}^2) \\ &= \pm 1. \end{aligned}$$

Hierbei wird vorausgesetzt, daß im Anfangsquadrat die kleinere Seite a gleich 1 ist. Wenn aber die Maßzahl für a die positive Zahl p ist, so ergibt sich als alternierende Differenz p^2 .

Das obige Ergebnis findet man bestätigt bei der Berechnung von $\sqrt{10}$, $\sqrt{13}$ und $\sqrt{17}$.

Für $\sqrt{10}$ erhält man die Zusammenstellung:

Rechteck	a	b	d	$a^2 + b^2$	d^2	Diff.
1.	1	$1 \cdot 3 = 3$	3	$1 + 9 = 10$	9	+ 1
2.	$3 + 3 = 6$	$6 \cdot 3 = 18$	$18 + 1 = 19$	$36 + 324 = 360$	361	- 1
3.	37	111	117	13690	13689	+ 1
4.	228	684	721	519840	519841	- 1

Die Näherungswerte sind:

$$z_1 = 3 : 1 = 3$$

$$z_2 = 19 : 6 = 3,167$$

$$z_3 = 117 : 37 = 3,162162$$

$$z_4 = 721 : 228 = 3,162281.$$

Bei $\sqrt{13}$ werde die Rechnung am Rechteck mit den Seitenzahlen $a_1 = 2$ und $b_1 = 3$ und mit dem »aussprechbaren« Durchmesser $d_1 = 3$ durchgeführt. Mittels der Gleichungen

$$a_{n+1} = b_n + d_n, \quad b_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot a_{n+1} \quad \text{und} \quad d_{n+1} = b_{n+1} + a_n$$

erhält man die Zusammenstellung:

Rechteck	a	b	d	$a^2 + b^2$	d^2	Diff.
1.	2	3	3	4 + 9 = 13	9	+4
2.	3 + 3 = 6	6	9 + 2 = 11	36 + 81 = 117	121	-4
3.	9 + 11 = 20	20	30 + 6 = 36	400 + 900 = 1300	1296	+4
4.	66	99	119	14157	14161	-4
5.	218	327	393	154453	154449	+4
6.	720	1080	1298	1684800	1684804	-4

Die Näherungswerte sind:

$$z_1 = 3$$

$$z_2 = 11 : 3 = 3,667$$

$$z_3 = 36 : 10 = 3,6$$

$$z_4 = 119 : 33 = 3,6060$$

$$z_5 = 393 : 109 = 3,605505$$

$$z_6 = 1298 : 360 = 3,605556.$$

Für $\sqrt{17}$ schließlich ergibt sich die Zusammenstellung:

Rechteck	a	b	d	$a^2 + b^2$	d^2	Diff.
1.	1	4	4	1 + 16 = 17	16	+1
2.	4 + 4 = 8	8	32 + 1 = 33	64 + 1024 = 1088	1089	-1
3.	65	260	268	71825	71824	+1
4.	528	2112	2177	4739328	4739329	-1

Die Näherungswerte sind:

$$z_1 = 4 : 1 = 4$$

$$z_2 = 33 : 8 = 4,125$$

$$z_3 = 268 : 65 = 4,12308$$

$$z_4 = 2177 : 528 = 4,123106.$$

Die Irrationalitäten der ersten Gruppe haben also mit der zur gleichen Gruppe gehörenden Irrationalität $\sqrt{2}$ gemeinsam:

1) Die Summe der Quadrate der Seitenzahlen ist abwechselnd um 1

größer oder kleiner als das Quadrat der Diagonalzahl; dabei wird die kleinere Seite $a = 1$ vorausgesetzt.

2) Die hieraus abgeleiteten Näherungswerte führen zu einer Intervallschachtelung für den Wert der Quadratwurzel.

Im Ausgangsrechteck wird die »aussprechbare« Diagonale gleich einer ganzen Zahl gesetzt, die aber größer als 1 ist. Die Vorstellung von dem *σπευματικός λόγος* der »Einheit« verliert also jetzt ihre Bedeutung.

Die Irrationalitäten der zweiten Gruppe zeigen bei der arithmetischen Behandlung ein wesentlich anderes Bild.

Bei $\sqrt{3}$ legt man der Rechnung das Ausgangsrechteck mit der kleineren Seite $a_1 = 1$ und der Diagonale $d_1 = 2$ zugrunde; die größere Seite $\sqrt{3}$ ist nun die »unaussprechbare Seite« (*ἄρρητος πλευρά*); sie wird zur *ἐνητὴ πλευρά*, indem man für sie $b_1 = 2$ einführt. Nun ergibt sich die Zusammenstellung (wobei $\text{Diff.} = a^2 + b^2 - d^2$ ist):

Rechteck	a	b	d	$d^2 - a^2$	b^2	Diff.
1.	1	2	$1 \cdot 2 = 2$	$4 - 1 = 3$	4	+ 1
2.	$2 + 2 = 4$	$8 - 1 = 7$	$4 \cdot 2 = 8$	$64 - 16 = 48$	49	+ 1
3.	$7 + 8 = 15$	$30 - 4 = 26$	$15 \cdot 2 = 30$	$900 - 225 = 675$	676	+ 1
4.	56	97	112	9408	9409	+ 1
5.	209	362	418	131043	131044	+ 1
6.	780	1351	1560	1825200	1825201	+ 1

Die Näherungswerte sind:

$$\begin{aligned}
 z_1 &= 2 : 1 = 2 & z_4 &= 97 : 56 = 1,73214 \\
 z_2 &= 7 : 4 = 1,75 & z_5 &= 362 : 209 = 1,732057 \\
 z_3 &= 26 : 15 = 1,73333 & z_6 &= 1351 : 780 = 1,732051.
 \end{aligned}$$

Wir erhalten eine fallende Folge von Näherungswerten.

In jedem Rechteck ist hier die Differenz $a^2 + b^2 - d^2 = 1$; d. h. die Summe der Quadrate der Seitenzahlen ist um einen gleichbleibenden Betrag größer als das Quadrat der Diagonalzahl. Diese Eigenschaft besitzen alle Reihen der Seiten- und Diagonalzahlen, die sich aus Quadratwurzeln der zweiten Gruppe herleiten lassen.

Geht man nämlich vom Rechteck mit der kleineren Seite a_n , der Diagonale $d_n = m \cdot a_n$ ($m = \text{pos. ganze Zahl}$) und der größeren Seite b_n aus, so ist nach Gl. (4):

$$\begin{aligned}
 a_n &= b_{n-1} + d_{n-1} = m \cdot a_{n-1} + b_{n-1}, & d_n &= m \cdot (m \cdot a_{n-1} + b_{n-1}), \\
 b_n &= d_n - a_{n-1} = (m^2 - 1) \cdot a_{n-1} + m \cdot b_{n-1}.
 \end{aligned}$$

Also ist:

$$\begin{aligned}
 a_n^2 + b_n^2 - d_n^2 &= (1 - m^2) \cdot (m \cdot a_{n-1} + b_{n-1})^2 + [(m^2 - 1) \cdot a_{n-1} + m \cdot b_{n-1}]^2 \\
 &= (1 - m^2) \cdot (m^2 \cdot a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2) + (1 - m^2)^2 \cdot a_{n-1}^2 + m^2 \cdot b_{n-1}^2 \\
 &= (1 - m^2) \cdot a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2 \\
 &= a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2 - d_{n-1}^2 \\
 &= a_{n-2}^2 + b_{n-2}^2 - d_{n-2}^2 \\
 &= \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\
 &= a_1^2 + b_1^2 - d_1^2.
 \end{aligned}$$

Die Differenz $a_1^2 + b_1^2 - d_1^2$ des Anfangsrechtecks kehrt also bei den Rechtecken der Folge immer wieder.

Wenn die Summe der Quadrate der Seitenzahlen größer als das Quadrat der Diagonalzahl ist, so erhält man eine fallende Folge von Näherungswerten. Legt man aber der »aussprechbaren« Seite b_1 einen solchen Wert bei, daß $a_1^2 + b_1^2 - d_1^2$ negativ wird, dann ergibt sich eine steigende Folge von Näherungswerten.

Wir setzen etwa im Falle vom $\sqrt{3}$ die größere Seite $b_1 = 1$. Dann erhalten wir die Zusammenstellung:

Rechteck	a	b	d	$d^2 - a^2$	b^2	Diff.
1.	1	1	2	$4 - 1 = 3$	1	- 2
2.	$1 + 2 = 3$	$6 - 1 = 5$	$3 \cdot 2 = 6$	$36 - 9 = 27$	25	- 2
3.	$5 + 6 = 11$	$22 - 3 = 19$	$11 \cdot 2 = 22$	$484 - 121 = 363$	361	- 2
4.	41	71	82	5043	5041	- 2
5.	153	265	306	70227	70225	- 2
6.	571	989	1142	978123	978121	- 2

Die Näherungswerte sind:

$$\bar{z}_1 = 1 : 1 = 1$$

$$\bar{z}_4 = 71 : 41 = 1,731707$$

$$\bar{z}_2 = 5 : 3 = 1,667$$

$$\bar{z}_5 = 265 : 153 = 1,732026$$

$$\bar{z}_3 = 19 : 11 = 1,7272$$

$$\bar{z}_6 = 989 : 571 = 1,732049.$$

Jetzt bilden also die Näherungswerte eine steigende Folge.

Anm.: Die Näherungswerte z_4 und $\bar{z}_5$ liefern für $\sqrt{3}$ die Intervallgrenzen, welche Archimedes in der »Kreismessung« benutzt:

$$1351 : 780 > \sqrt{3} > 265 : 153.$$

Es ist aber nicht anzunehmen, daß Archimedes auf diesem umständlichen Wege zu seiner Abgrenzung für $\sqrt{3}$ gekommen ist; sicherlich gab

es zu seiner Zeit bereits ein Verfahren, das rascher und vor allem *in einem Rechengang* zum Ziele führte, oder es wurde, falls noch nicht vorhanden, von Archimedes neu entwickelt. Man vergleiche hierzu das oben über Archytas von Tarent Gesagte und die Ausführungen von Th. Heath in seinem Buch »Archimedes' Werke«⁶⁶. Durch die Untersuchungen von Herrn J. E. Hofmann⁶⁷ ist übrigens die alte Frage, auf welche Weise Archimedes zu seinen Näherungswerten gelangt ist, wohl als endgültig geklärt anzusehen.

Die Berechnung der weiteren Näherungswerte der zweiten Gruppe bietet nichts Neues.

Abschließend kann zur Berechnung der Näherungswerte aus den Seiten- und Durchmesserzahlen von Rechtecken festgestellt werden, daß sich dabei ein wesentlicher Unterschied bemerkbar macht, je nachdem die Wurzel der ersten oder der zweiten Gruppe angehört. Während bei den Quadratwurzeln der ersten Gruppe der Wurzelwert *in einem Rechengang* in immer enger werdende Grenzen eingeschlossen wird, bedarf es bei den Wurzeln der zweiten Gruppe hierfür *zweier Ansätze*. Dieses verschiedene Verhalten der Quadratwurzeln auch bei der Gewinnung ihrer Näherungswerte mag mit dazu beigetragen haben, daß Theodoros in seinem Vortrag die Quadratwurzeln $\sqrt{3}$ und $\sqrt{5}$ als die typischen Vertreter der beiden Gruppen in ihrem gegensätzlichen Verhalten besonders herausgestellt hat.

7. Arithmetische Deutungsversuche zur Theodoros-Stelle (Hultsch, H. Vogt).

Auf sehr verschiedene Weise haben namhafte Forscher der Geschichte der altgriechischen Mathematik versucht, die mathematische Stelle in Platons Dialog »Theaetet« zu deuten und daraus einen Einblick in die Entwicklungsgeschichte der Lehre vom Irrationalen zu gewinnen. Die Theodoros-Stelle kann geradezu als der Schlüssel für das Verständnis dieses Teiles der griechischen Mathematikgeschichte angesehen werden. Aus den zahlreichen Untersuchungen, welche der Aufgabe dienten, den Vortrag des Theodoros zu rekonstruieren, können hier nur einige besonders charakteristische Ergebnisse von Fr. Hultsch, H. Vogt, H.G. Zeuthen, B. L. van der Waerden u. a. mitgeteilt werden. Ihre Gegenüberstellung und Vergleichung mit dem oben dargelegten Beweisverfahren sollen zu einem neuen Deutungsversuch der Theodoros-Stelle beitragen.

Es werde mit den Untersuchungen von Fr. Hultsch begonnen⁶⁸. Nach Hultsch hat Theodoros bei jeder Quadratwurzel zuerst durch Zeichnen

(ἐγγραφῇ) den Existenzbeweis für die Seite des zugehörigen Quadrats geliefert und dann den Nachweis für die Inkommensurabilität der betreffenden Quadratseite mit der Einheitsstrecke geführt. Hultsch macht darauf aufmerksam, daß im Bericht von Theaetetus zu δύνάμεις die Epitheta ῥέπων, πεντέπων und ἑπτακαίδεκάπων gefügt worden sind. »Kein anderer Mathematiker Griechenlands hat je bei allgemeinen geometrischen Beweisen nach dem Fußmaß gerechnet«⁵⁹. Hieraus lasse sich eine wichtige Folgerung ziehen. Wenn man mit der ῥέπων δύναμις des Theodoros beginne, so liege darin »erstens die Andeutung, daß er zu einem Quadrat von 3 *Flächeneinheiten* gewisse Beträge von *Längeneinheiten* für die Seite finden wollte, zweitens, daß zu diesem Zwecke *Ausrechnungen* angestellt werden sollten, drittens, daß die Flächeneinheit und die Längeneinheit gerade so wie das griechische Fußmaß in Halbe, Viertel, Achtel und Sechzehntel geteilt werden sollten«. Und wie die Pythagoreer, um einen Näherungswert von $\sqrt{2}$ zu erhalten, $\sqrt{2} = \frac{1}{5}\sqrt{50}$ gesetzt hätten, so sei Theodoros von der Identität $\sqrt{3} = \frac{1}{4}\sqrt{48}$ ausgegangen und habe für $\sqrt{3}$ die Intervallgrenzen gefunden:

$$1\frac{1}{2}\frac{1}{8}\frac{1}{16}\frac{3}{32}\frac{1}{64} > \sqrt{3} > 1\frac{1}{2}\frac{1}{8}\frac{1}{16}\frac{3}{32}\frac{1}{128}.$$

»Jedenfalls bürgt uns das Platonische ἀποφαίνων dafür, daß Theodoros zwei Grenzen für $\sqrt{3}$ gesetzt und dann gezeigt hat, wie man diese Grenzen immer enger ziehen könne, ohne jedoch dazwischen je einen rationalen Zahlenwert auffinden zu können, dessen Quadrat gleich 3 sein würde«⁶⁰.

Auf diese Ergebnisse von Hultsch soll erst im Zusammenhang mit den Untersuchungen von H. Vogt näher eingegangen werden.

Wie Hultsch, so unterscheidet auch H. Vogt beim Vortrag von Theodoros einen geometrischen und einen arithmetischen Teil. Er faßt die Worte ἐγγραφῇ und ἀποφαίνων in Theaetetus Bericht so auf, daß durch sie für jeden Einzelbeweis zwei wesentliche Schritte gekennzeichnet sind. »Theodor lieferte zunächst für jede der Linien, deren dem Zahlbegriff widersprechende Eigenschaft er nachweisen wollte, den *Existenzbeweis*, indem er sie mit Hilfe ihres Quadrats zeichnete; daran schloß er den *logischen Nachweis* der Inkommensurabilität«⁶¹. Diese Auffassung deckt sich weitgehend mit der Erläuterung, die H. Schmidt zu der fraglichen Stelle gibt (vgl. oben S. 13).

Sodann wendet sich H. Vogt dem Beweisverfahren von Theodoros zu und führt aus⁶²: »Da Plato diesen Beweisgang nicht überliefert, ja nicht einmal angedeutet hat, so gilt es, ein im Bereiche der alten griechischen

Mathematik liegendes Verfahren durch Analogie zu erschließen«. Er greift auf den zuerst von Aristoteles häufig erwähnten arithmetischen Beweis für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ zurück und weist darauf hin, daß man ihn ohne weiteres für den entsprechenden Beweis bei $\sqrt{3}$ »wörtlich nachbilden« kann, etwa in der Weise⁶³: »Sei ein Quadrat das dreifache eines anderen, und verhalten sich die Seiten wie die teilerfremden Zahlen $p:q$, so muß $p^2 = 3q^2$ sein⁶⁴; folglich muß p^2 und somit auch p den Teiler 3 enthalten; also q darf nach Annahme diesen Teiler nicht enthalten. Setzt man $p = 3 \cdot r$, so ist $3 \cdot r^2 = q^2$; also muß q^2 und somit auch q doch den Teiler 3 enthalten, was dem Bewiesenen widerspricht«.

Nach H. Vogt »gab Theodoros nicht ein allgemeingültiges Beweisprinzip, sondern schloß an die Einzelkonstruktion jedes Quadrats den Einzelbeweis für die Inkommensurabilität dieser Quadratseite, *κατὰ μίαν ἐκάστην προαιρούμενος*«. Diese Überlegungen konnten von Fall zu Fall kürzer werden, sodaß alle 12 Beweise von $\sqrt{3}$ bis $\sqrt{17}$ sich in einer Lektion abwickeln ließen. Außerdem »ging aus der für alle Quadrate gleichartigen Zeichnung und dem für alle gleichartigen Beweisgang die Überzeugung hervor, daß dieselbe Überlegung sich ohne Ende fortsetzen lasse«. »Theodor konnte bei $\sqrt{17}$ oder an einer beliebigen anderen Stelle aufhören; den Beweis für das Vorhandensein einer endlosen Reihe von Irrationalitäten hatte er durch Induktion erbracht«⁶⁵.

Im Anschluß kommt H. Vogt auf die These von Hultsch zu sprechen, wonach Theodoros mit Näherungswerten operiert haben sollte. Mit Recht wendet er dagegen ein⁶⁶: »Erstens, das Platonische *ἀποφαλῶν* sagt lediglich aus, er *bewies*, gibt aber keine Andeutung über den Gang des Beweises, also auch keinen Hinweis auf die Anwendung von Näherungswerten. Zweitens, die Methode der Näherungswerte verlangt für jede neue Zahl einen neuen Kunstgriff und »in der Form ziemlich umständliche Ausrechnung«; sie hätte von $\sqrt{3}$ bis $\sqrt{17}$ nicht annähernd in einer oder einigen Stunden erledigt werden können. Endlich und hauptsächlich: Hätte Theodor für $\sqrt{3}$ immer enger werdende Näherungswerte berechnet, so hätte dies wohl zu der Vermutung, ja zu der subjektiven Überzeugung führen können, daß $\sqrt{3}$ überhaupt nicht in Brüchen ausdrückbar sei, aber ein *Beweis*, der es doch sein soll, wäre das nicht gewesen und nie geworden. Beweisend würden die Näherungswerte nur dann sein, wenn sie zu einem notwendig *unendlichen* Prozesse gestaltet würden. Diesen Gedankenweg aber hat nie ein Grieche gemacht«.

H. Vogt hätte gegen das Argument von Hultsch, daß die Ausdrücke

ἡ τρίπους δύναμις, ἡ πεντέπους δ. usw. auf ein Berechnen von Näherungswerten hinweisen, noch einwenden können: Platon habe sich an dieser Stelle offenbar nur der üblichen Ausdrucksweise bedient, um Quadrate zu bezeichnen, die dreimal, fünfmal usw. so groß wie das Einheitsquadrat (ἡ μονάδα δ.) sind. Man vergleiche das Gespräch des Sokrates mit dem Sklaven im Dialog »Menon«⁶⁷; hier bezeichnet Platon die Quadratfläche als τὸ τετράγωνον χωρίον und verwendet dann die Ausdrücke τὸ τετράπουν, ὀκτώπουν χωρίον.

An den Ausführungen sowohl von Hultsch wie auch von H. Vogt fällt auf, daß sie das Wort ἀποφαίνειν mit »Beweisen« wiedergeben; dadurch haben sich beide die Deutung der Theodoros-Stelle in gewisser Beziehung erschwert.

Bereits E. Sachs weist in ihrer Abhandlung über Theaetet auf die verschiedene Bedeutung von ἀποφαίνειν und ἀποδεικνύειν im mathematischen Sprachgebrauch der Griechen hin⁶⁸. Sie erinnert an die Stelle in dem Briefe des Archimedes an Dositheos⁶⁹, wo Archimedes ausdrücklich dem Eudoxos die Beweise für die Lehrsätze Euklid XII,7 und 10 zuschreibt, und macht dann auf die wichtige Stelle in der Ephodos (im Briefe an Eratosthenes) aufmerksam⁷⁰: Εὐδόξος ἐξηγήσκειν πρῶτος τὴν ἀπόδειξιν, περὶ τοῦ κύβου καὶ τῆς πυραμίδος, ὅτι τρίτον μέρος ὁ μὲν κύβος τοῦ κύβου, ἡ δὲ πυραμὶς τοῦ πρίσματος, τῶν βάσεων ἔχοντων τὴν αὐτὴν καὶ ὕψος ἴσον, οὐ μικράν ἀποφάινει ἄν τις. Δημοκρίτῳ μερίδα πρῶτη τὴν ἀπόφασιν τὴν περὶ τοῦ εἰρημένου σχήματος χωρὶς ἀποδείξεως ἀποφηνάμενον.

Hier stellt Archimedes dem Eudoxos, der »als erster die genannten Lehrsätze bewiesen habe«, den Demokritos gegenüber, dem »kein geringer Anteil des Verdienstes zuzuerkennen sei, da er als erster die Lehrsätze ausgesprochen habe, allerdings ohne Beweise dafür zu geben«.

Später hat J. H. Anderhub mit Nachdruck auf die gegensätzliche Bedeutung von ἀποφαίνειν und ἀποδεικνύειν hingewiesen⁷¹, und in jüngster Zeit hat Herr van der Waerden diesen Hinweis wiederholt⁷².

Darnach hat ἀποφαίνειν den Sinn von »ans Licht bringen«, »sichtbar machen«, »mit Worten dartun«, »aufzeigen« usw.

Hultsch und H. Vogt stimmen auch darin überein, daß sie beide die Worte ἔγραφε . . . ἀποφαίνων dahin auslegen, es habe sich bei dem Vortrag von Theodoros um ein Nacheinander von »Zeichnen« und »Beweisen« gehandelt. Diese Auffassung scheint aber nicht vereinbar zu sein mit der Bedeutung des Partizipiums Präsenz ἀποφαίνων, das doch die Gleichzeitigkeit des »Aufzeigens« mit dem »Zeichnen« (ἔγραφε) ausdrücken soll. Hätte Theaetet diese scharfe Trennung von »Existenzbeweis« und »Auf-

zeigen der Inkommensurabilität« zum Ausdruck bringen wollen, so würde er *ἔγραψε . . . καὶ ἀπέφαινε* gesagt haben. Die einfachste und beste Deutung dieser Stelle ist doch wohl die, daß es sich bei dem Vortrag von Theodoros um ein »geometrisches Aufzeigen« gehandelt hat; hierbei kann man im wahren Sinne des Worts von einer *Gleichzeitigkeit der Handlungen* sprechen, indem nämlich der Vortragende seine Worte durch gleichzeitiges Zeichnen von Figuren erläutert. Daß von den beiden gleichzeitig erfolgenden Handlungen das »Zeichnen« durch den Indikativ Imperfekt ausgedrückt wird, könnte man sogar dahin auslegen, Theaetet habe damit nachdrücklich auf den *geometrischen* Inhalt des Vortrags vom Theodoros hinweisen wollen.

Die *Existenz* der zu untersuchenden Quadratseiten ging übrigens bei der Annahme, Theodoros habe ein geometrisches Verfahren eingeschlagen, in jedem Falle aus der Vorbetrachtung und aus der sich anschließenden Zeichnung der Rechtecke zur Genüge hervor; *eines besonderen Existenzbeweises bedurfte es daher nicht.*

Unbeschränkt wird man der Widerlegung Hultschs durch H. Vogt zustimmen, was dessen Nachweis der Irrationalität der Quadratwurzeln mittels des Berechnens von Näherungswerten betrifft. Der Ausdruck *ἀποφαίνων* kann uns keineswegs ein derartiges Verfahren verbürgen, das übrigens für den verlangten Nachweis auch völlig wertlos ist. Mit Recht bemerkt Anderhub hierzu⁷³: »Ich glaube, es gibt nicht viele Leser Platons, die all das aus *einem* Wort herauszulesen vermögen«.

Der arithmetische Beweis von H. Vogt, den er aus dem bei Aristoteles öfters erwähnten Beweis für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ entwickelt, fordert aber in mehrfacher Hinsicht zum Widerspruch heraus.

Die Annahme Vogts, daß dieser Beweis bereits zu Theodoros' Zeit bekannt gewesen sei, ist durch keine Überlieferung irgendwelcher Art erwiesen. Man muß H. Vogt allerdings zugute halten, daß zu seiner Zeit die Meinung vorherrschte, der Beweis könne wohl den Pythagoreern zugeschrieben werden. Diese Auffassung vertritt z. B. J. L. Heiberg in seiner »Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaften im Altertum«⁷⁴. Auffallenderweise hat man nur selten die Möglichkeit eines *geometrischen Beweises* erwogen, sondern hat ohne Bedenken den nur aus späterer Zeit verbürgten arithmetischen Beweis um etwa 100 Jahre vordatiert.

Übrigens ist an den Ausführungen von H. Vogt nicht recht verständlich, wieso er sein arithmetisches Beweisverfahren einmal als ein »nicht allgemeingültiges Beweisprinzip« bezeichnet und kurz darnach von dem »für alle Quadrate gleichartigen Beweisgang« spricht. Auch die eingangs

gemachte Bemerkung, daß sich die Irrationalitätsbeweise für $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{5}$ usw. dem Beweis für $\sqrt{2}$ »wörtlich nachbilden« lasse, zeugt doch dafür, daß es sich hier um ein *allgemeingültiges Beweisverfahren* handeln soll.

Die Beweise für die Irrationalität von $\sqrt[3]{3}$ und $\sqrt[3]{5}$ unterscheiden sich von dem für $\sqrt{2}$ tatsächlich nur dadurch, daß man im Wortlaut des Beweises für die Ziffer 2 die Ziffer 3 bzw. 5 einsetzt. Wenn die Vogtsche Annahme zuträfe, ließe sich also kein Grund dafür angeben, daß Theaetet in seinem Bericht die Quadrate mit 3 und 5 Quadratfuß Fläche besonders erwähnt.

Auf weitere Einwände gegen das Vogtsche Beweisverfahren stoßen wir, wenn wir uns nun den Untersuchungen von H. G. Zeuthen über die Theodoros-Stelle zuwenden.

8. Geometrisch-algebraische Deutungsversuche zur Theodoros-Stelle (Zeuthen, van der Waerden).

In seiner grundlegenden Abhandlung über »Die arithmetischen Bücher in Euklids Elementen« setzt sich Zeuthen eingehend mit Vogts Auffassung der »Entdeckungsgeschichte des Irrationalen« auseinander. Zeuthen geht wie H. Vogt von der Annahme aus, daß bereits die alten Pythagoreer den arithmetischen Beweis für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ besessen hätten; sie hätten aber anfangs nicht die Notwendigkeit erkannt, daß man vor einer Verallgemeinerung dieses Satzes zunächst die Eindeutigkeit der Zerlegung ganzer Zahlen in Primfaktoren habe beweisen müssen. So sei es möglich gewesen, daß sie den arithmetischen Beweis für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ als »instar omnium« für die anderen Irrationalitäten angesehen hätten⁷⁵. Mit dieser Feststellung wendet sich Zeuthen – allerdings ohne Namensnennung – gegen H. Vogt, welcher die Meinung vertritt⁷⁶: »Der Übergang von der Teilbarkeit durch den Faktor 3, 5 usw. liegt ebenfalls vollständig im Bereiche der vorplatonischen Mathematik, welche die Zerlegung der Zahlen in Primfaktoren, gemeinsame Teiler usw. durchaus beherrschte«. Nach Zeuthen besteht das Verdienst von Theodoros in der Aufdeckung der Unvollständigkeit der früheren Irrationalitätsbeweise und in seinem Versuch, sie zu ergänzen bzw. durch bessere Beweise zu ersetzen⁷⁷.

Über die Beweise von Theodoros urteilt Zeuthen, sie seien mehr *geometrischer* Natur gewesen als die späteren Beweise von Theaetet-Euklid; wahrscheinlich habe Theodoros auch ein neues Beweisverfahren ange-

wandt, das in Beziehung zu dem erstmalig von ihm benutzten Ausdruck $\xi\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\rho\omicron\varsigma$ gestanden habe⁷⁸. Er habe sich dabei gewiß des Lehrsatzes bedient, den wir jetzt bei Euklid X,2 finden. An zwei Beispielen zeigt Zeuthen, wie Theodoros mit Hilfe dieses Lehrsatzes die Beweise geführt haben könnte.

Zeuthen entwickelt zunächst für den Fall von $\sqrt{5}$ ein Beweisverfahren, das hier in wortgetreuer Übersetzung wiedergegeben werden soll⁷⁹.

Man betrachte die Reihe der Reste, welche man beim Aufsuchen des größten gemeinsamen Maßes von $\sqrt{5}$ und 1 erhält:

$$\sqrt{5}, 1, \sqrt{5} - 2, (\sqrt{5} - 2)^2.$$

Da die beiden letzten Glieder das nämliche Verhältnis besitzen wie das 2. und 3. Glied, sieht man unmittelbar, daß die Reihe sich ohne Ende fortsetzt, was nach Euklid X,2 beweist, daß $\sqrt{5}$ und 1 inkommensurabel sind.

Wenn man in der Gleichung

$$1 = (\sqrt{5} + 2) \cdot (\sqrt{5} - 2) = 4 \cdot (\sqrt{5} - 2) + (\sqrt{5} - 2)^2,$$

welche uns den letzten Rest liefert, links 1 durch 1^2 ersetzt, so bietet sie sich unmittelbar zur Verwendung der geometrischen Algebra des II. Buches der Elemente an. Es sei (Fig. 13) $AB = 1$, $AC = 2$ und $AD = = \sqrt{5}$ (konstruiert aus $\sqrt{2^2 + 1^2}$). Die drei ersten Glieder der Reihe sind also AD , AB und CD . Nun zeichne man die Quadrate AG und AJ . Der Gnomon $EJDCGF$ ist gleich AB^2 [wegen $(\sqrt{5})^2 - 2^2 = 1^2$] und setzt sich

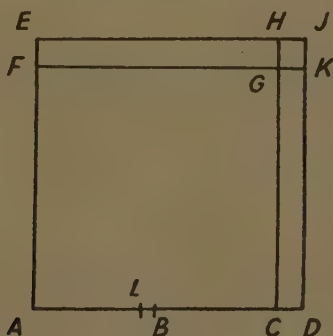


Fig. 13.

zusammen aus den Rechtecken EG und GD gleich $4 \cdot AB \cdot CD$ und dem Quadrat GJ gleich CD^2 . Es ist also

$$AB = 4 \cdot CD + \frac{CD}{AB} \cdot CD.$$

Macht man⁸⁰ AL gleich $4 \cdot CD$, so ist also der Rest LB bestimmt durch $AB : CD = CD : LB$. Die Reste bilden demnach eine stetige Proportion.

Zeuthen führt dann eine ähnliche Betrachtung für den Fall von $\sqrt[3]{3}$ durch.

Die Glieder der Reihe, die zur Auffindung des größten gemeinsamen Maßes von $\sqrt[3]{3}$ und 1 dient, sind

$$\sqrt[3]{3}, 1, \sqrt[3]{3} - 1, \frac{1}{2} \cdot (\sqrt[3]{3} - 1)^2, \frac{1}{2} \cdot (\sqrt[3]{3} - 1)^3.$$

Weil sich das 5. Glied zum 4. ebenso verhält wie das 3. zum 2., so wird sich diese Reihe ohne Ende fortsetzen.

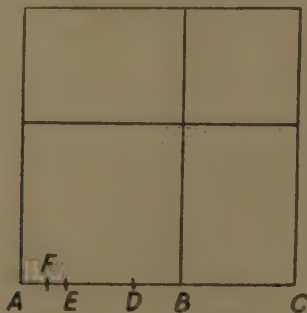


Fig. 14.

Die Alten konnten diesen Zusammenhang auch mittels einer geometrischen Konstruktion erkennen (Fig. 14). Es sei $AB = 1$, $AC = \sqrt[3]{3}$ und $AD = BC$. Die vier ersten Glieder der obigen Reihe werden also durch AC , AB , $BC = AD$ und $DB = AB - BC = AE$ dargestellt.

Da der Gnomon [wegen $(\sqrt[3]{3})^2 - 1^2 = 2$] gleich $2 \cdot AB^2$ ist, so erhält man: $2 \cdot AB^2 = 2 \cdot AB \cdot BC + BC^2$, also

$$AE = DB = \frac{1}{2} \cdot \frac{BC^2}{AB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AD^2}{AB}.$$

Um den nächsten Rest zu finden, muß man DB zweimal von AD abziehen. Man erhält

$$AF = AD - 2 \cdot DB = \frac{AD}{AB} \cdot (AB - AD) = \frac{AD}{AB} \cdot DB = \frac{AD}{AB} \cdot AE,$$

folglich $AF : AE = AD : AB$.

Nach Zeuthen konnte Theodoros mittels ähnlicher Entwicklungen auch die Irrationalität von $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, ... $\sqrt{17}$ beweisen.

Die Pythagoreer sind also nach Zeuthens Ansicht durch eine algebraische Überlegung zu einem geometrischen Beweisverfahren für die Inkommensurabilität der Seiten der Quadrate von 3, 5, ... 17 Quadratfuß geführt worden. Die hier wiedergegebenen Beweise sind sicherlich ein lehrreiches Beispiel für die Verknüpfung algebraischer und geometrischer Betrachtungsweise im Sinne der alten Griechen. In interessanter Weise wird jedesmal das geometrische Äquivalent für die vorhergehende Rechnung gegeben.

Aber das hier aufgezeigte Beweisverfahren läßt doch verschiedene Mängel erkennen. Sowohl bei der algebraischen Vorbetrachtung wie auch bei der geometrischen Durchführung selbst soll sich nach Zeuthens Darstellung Theodoros des Hilfsmittels der *Proportion* bedient haben. Dies erscheint wenig wahrscheinlich; denn zur Entscheidung, ob $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ usw. rational oder irrational sind, durfte vor Eudoxos kein Lehrsatz Anwendung finden, der im Falle der Irrationalität der untersuchten Größe seine Gültigkeit verlieren mußte (in der gleichen Weise, wie die alte Proportionslehre damals für $\sqrt{2}$ nicht mehr galt). In sehr geschickter Weise ersetzt zwar Zeuthen in seiner geometrischen Umschreibung das Verhältnis inkommensurabler Strecken, z. B. $1 : (\sqrt{5} - 2)$, durch die Vergleichung von Flächen. Aber für den Nachweis, daß sich die Wechselwegnahme der Strecken beliebig weit fortsetzen läßt, kann er die Proportion doch nicht entbehren. Daher muß mit Rücksicht auf den mathematischen Wissensstand der Griechen um 400 v. Chr. der von Zeuthen dem Theodoros zugedachte Beweis abgelehnt werden.

Überdies gestaltet sich der Nachweis, wie oft der letzte Rest im vorhergehenden enthalten ist, und die Feststellung, ob zwei spätere Reste das gleiche Verhältnis wie die beiden ersten Reste besitzen oder nicht, recht umständlich, wenn man von den einfachsten Fällen, $\sqrt{5}$ und $\sqrt{3}$, welche Zeuthen als Beispiele anführt, zu $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{13}$ und $\sqrt{14}$ aufsteigt. Man kann nur dem Urteil von Herrn J. E. Hofmann zustimmen, der in diesem Zusammenhang von »sehr gekünstelten Beweisen« spricht⁸¹.

Schließlich ist auch zu bedenken, daß die Reste sehr rasch abnehmen;

eine einigermaßen brauchbare Zeichnung, die zur Verdeutlichung des Vortrags unbedingt erforderlich war, ließ sich daher in denjenigen Fällen, wo erst nach vier ($\sqrt[4]{7}$, $\sqrt[4]{14}$) oder fünf ($\sqrt[5]{13}$) Schritten das gleiche Verhältnis zwischen benachbarten Resten wiederkehrt, nur unter großen Schwierigkeiten herstellen.

Aus diesen Gründen ist es sehr unwahrscheinlich, daß Theodoros mittels des von Zeuthen angegebenen Verfahrens die Unmeßbarkeit aller Quadratseiten bis zum 17-fachen Quadrat in *einer* Vortragsstunde hätte aufzeigen können.

Die Meinungsverschiedenheiten zwischen H. Vogt und Zeuthen führten auf beiden Seiten zu einer immer schärferen Durchdringung des strittigen Fragenkomplexes. In seiner späteren Abhandlung »Über den geschichtlichen Ursprung der irrationalen Größen«⁸² kommt Zeuthen zu dem Ergebnis: *Vor Theodoros hätten sich die griechischen Mathematiker die Frage gestellt, ob die Quadratseiten durch (ganze oder gebrochene) Zahlen ausdrückbar seien. Theodoros habe dagegen die Frage nach der Meßbarkeit dieser Größen gestellt; er habe also an Stelle des Irrationalitätsbegriffes den der Inkommensurabilität gesetzt und sein Beweisverfahren auf den jetzt in Euklid X,2 enthaltenen Satz gegründet.* Sicherlich habe Theodoros sein Verfahren auch auf den Fall $\sqrt{2}$ angewandt und sei dabei zu einer Kettenbruchentwicklung in geometrischer Form geführt worden; hierbei hätten sich die gleichen Näherungswerte für die Diagonale des Quadrats ergeben wie früher mittels der Seiten- und Durchmesserzahlen. An dieser Stelle seiner Ausführungen steht Zeuthen unmittelbar vor dem entscheidenden Schritt, der ihn zu dem hier im dritten Abschnitt entwickelten *geometrischen Beweis* für die Inkommensurabilität der Quadratdiagonale hätte führen können.

In der Folgezeit gehen alle Deutungsversuche zur Theodoros-Stelle von geometrischen Überlegungen aus. Dies ist z. B. der Fall bei T. Bonnesen, der in seinem Aufsatz »Sur la théorie des nombres irrationnels de l'antiquité«⁸³ an die Arbeiten von Zeuthen anknüpft. Mit der Argumentation von Bonnesen setzen sich die Herren H. Hasse und H. Scholz in ihrer Abhandlung »Die Grundlagenkrise der griechischen Mathematik«⁸⁴ auseinander. In seiner letzten Veröffentlichung »Proben mathematischer Forschung«⁸⁵ deutet Herr Hasse ein geometrisches Beweisverfahren an, welchem ein ähnlicher Gedanke wie dem von uns im fünften Abschnitt mitgeteilten Beweis zugrunde liegt; der Verfasser geht aber auf Einzelheiten, wie der Beweis durchzuführen ist, *nicht näher ein*. Seine Bemerkung: »Die erforderlichen Konstruktionen werden um so komplizierter, je größer die

Gliederzahl der Periode ist; denn erst nach dieser Anzahl von Konstruktionsschritten kommt man zu einem dem ursprünglichen Dreieck ähnlichen Dreieck« zeigt aber, daß er ohne den Ähnlichkeitsbegriff nicht auszukommen glaubt. Auch findet sich kein Hinweis, daß man in vielen Fällen den Beweis mittels der Identität $p \cdot \sqrt{n} = \sqrt{p^2 \cdot n}$ vereinfachen kann.

Vor kurzem hat Herr van der Waerden ein sehr übersichtliches Verfahren entwickelt, das in glücklicher Weise die Mängel des Zeuthenschen Verfahrens vermeidet, allerdings nicht auf die Verwendung von Proportionen verzichten kann.

Herr v. d. Waerden⁸⁶ führt seine Methode am Quadrat mit 3 Quadratfuß Inhalt durch. Er bezeichnet die Seite dieses Quadrats mit w und die Seite des Einheitsquadrats mit e ; es ist also $w^2 = 3 \cdot e^2$. Durch das Abtragen von e auf w entsteht der erste Rest $w - e$. Bevor er diesen Rest von e abzieht, ersetzt er e und $w - e$ durch zwei neue Strecken, die größer als e und $w - e$ sind, aber das gleiche Verhältnis wie diese aufweisen. Durch diesen Kunstgriff erreicht er dreierlei:

1. Er vermeidet die Schwierigkeiten, die infolge der rasch kleiner werdenden Streckenreste bei der mehrmaligen Wiederholung der Wechselwegnahme entstehen müßten.

2. Er übersieht mit einem Blick, wie oft der letzte Rest im vorhergehende enthalten ist, und kann daher mit Leichtigkeit den neuen Rest bestimmen.

3. Er erkennt sofort, wann zwei spätere Reste das gleiche Verhältnis wie die Anfangsreste aufweisen.

Offenbar ändert die Ersetzung des Streckenpaares e und $w - e$ durch ein verhältnisgleiches Paar nichts am Endergebnis des eingeschlagenen Verfahrens.

Man erhält das neue Streckenpaar mittels der Proportion:

$$e : (w - e) = (w + e) : 2e,$$

deren Richtigkeit aus der Produktgleichung

$$(w - e) \cdot (w + e) = w^2 - e^2 = 2 \cdot e^2 \text{ folgt.}$$

Nun zieht man $2e$ von $w + e$ ab und erhält $w - e$.

Die Strecken $2e$ und $w - e$ werden durch ein verhältnisgleiches Paar ersetzt, das sich aus der bereits als richtig erkannten Proportion

$$2e : (w - e) = (w + e) : e \text{ ergibt.}$$

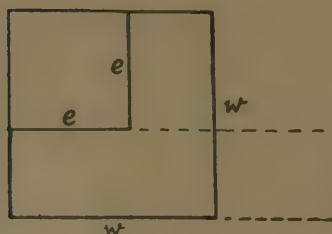


Fig. 15.

Die Strecke e kann man zweimal von $w + e$ abziehen, und es verbleibt der zweite Rest $w - e$. Damit erhält man aber das Streckenpaar e und $w - e$ wieder, das schon zu Anfang des Prozesses auftrat. Es kehrt also das gleiche Streckenverhältnis wieder, d. h. der Abtragungsvorgang ist periodisch und hört niemals auf.⁸⁷

Die Richtigkeit der Produktgleichung konnte von Theodoros durch Flächenberechnung nachgewiesen werden: $w^2 - e^2$ ist die Fläche des Gnomons in obenstehender Figur (Fig. 15). Schneidet man vom Gnomon das oberste Stück ab und setzt es rechts wieder an, so erhält man das flächengleiche Rechteck mit den Seiten $w + e$ und $w - e$; es ist also $w^2 - e^2 = (w + e) \cdot (w - e)$.

Die nach dieser Methode zu führenden Beweise für die Seiten des 5-fachen, 10-fachen und 17-fachen Quadrats sind besonders einfach. Im Falle des Quadrats von 5 Quadratfuß Fläche z. B. ist $w^2 = 5 \cdot e^2$, und als ersten Rest findet man $w - 2e$. Das Streckenpaar e und $w - 2e$ wird zufolge der Proportion

$$e : (w - 2e) = (w + 2e) : e$$

durch das Streckenpaar $w + 2e$ und e ersetzt. Die Strecke e läßt sich viermal auf $w + 2e$ abtragen; als Rest verbleibt $w - 2e$. Man gelangt also bereits nach *einem* weiteren Schritt wieder zu dem Streckenpaar e und $w - 2e$. Der Abtragungsvorgang ist also periodisch. Er hat sein Analogon in der Kettenbruchentwicklung

$$\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \dots}} = [2; 4; \dots]$$

mit der eingliedrigen Periode 4.

Herr v. d. Waerden gibt noch die sechs Proportionen an, welche für die Umwandlung der Streckenpaare im Falle von $\sqrt{19}$ erforderlich sind. Man kann daraus die Kettenbruchentwicklung $\sqrt{19} = [4; 2, 1, 3, 1, 2, 8; \dots]$ mit einer sechsgliedrigen Periode ablesen. Er hält es mit Rücksicht auf diesen umständlichen Ablauf des Beweisverfahrens für vollkommen begreiflich, daß Theodoros in seinem Vortrag bei $\sqrt{17}$ aufhörte. ($\sqrt{18}$ scheidet bei dieser Betrachtung aus, weil diese Wurzel auf $3 \cdot \sqrt{2}$ zurückgeführt werden kann).

Hierzu ist zu sagen, daß schon $\sqrt{13}$ ein schweres Hindernis für Theodoros dargestellt hätte; denn $\sqrt{13}$ verlangt *fünf* Streckenumwandlungen, entsprechend der fünfgliedrigen Periode des Kettenbruchs $\sqrt{13} = [3; 1, 1, 1, 1, 6; \dots]$. Theodoros hätte also bereits bei $\sqrt{13}$ durch die Umständlichkeit des Beweisverfahrens zur Beendigung seines Vortrags veranlaßt werden können.

Das Beweisverfahren von Herrn v. d. Waerden stellt gegenüber dem von Zeuthen jedenfalls einen großen Fortschritt dar; es zeichnet sich im Vergleich mit jenem durch eine überraschende Einfachheit aus. Leider läßt sich aber gerade an der entscheidenden Stelle, bei der Umwandlung der Streckenpaare, die Verwendung von Proportionen nicht vermeiden. Die Produktgleichung $(w - e) \cdot (w + e) = e \cdot 2e$ besteht zu Recht. Bedenklich ist jedoch der Weg, auf dem Theodoros aus dieser Gleichung die Proportion $e : (w - e) = (w + e) : 2e$ abgeleitet haben soll. Für diese Operation kam der jetzt in Euklid VII,19 enthaltene Lehrsatz über die Umwandlung eines Zahlenprodukts in eine Proportion in Betracht, der sicherlich in der damaligen Zeit schon bekannt war. Dieser Lehrsatz läßt sich auch auf *meßbare* Strecken anwenden und gestattet dann den Übergang von der Flächengleichheit zweier Rechtecke zur Verhältnisgleichheit ihrer Seiten. Dies hat aber zur Voraussetzung, daß sich die Streckenverhältnisse *durch Zahlen* darstellen lassen. Theodoros hätte also im vorliegenden Falle die *Meßbarkeit* derjenigen Strecken voraussetzen müssen, deren *Unmeßbarkeit* er nachweisen wollte. Es ist aber nicht anzunehmen, daß sich Theodoros in derartige Widersprüche verstrickt hat.

Herr v. d. Waerden äußert selbst⁸⁸, daß zur Zeit des Theodoros, am Ende des 5. Jahrhunderts, in gewisser Hinsicht bereits hohe Anforderungen an die Strenge der Beweise gestellt wurden. Er nimmt dabei Bezug auf seine Besprechung des Hippokrates-Fragments⁸⁹. Offenbar ist er der Meinung, daß Theodoros in gleicher Weise Proportionen verwenden

durfte, wie dies Hippokrates, nach dem Mathematiker-Verzeichnis ein Zeitgenosse des Theodoros, bei seinen Mönchen-Quadraturen tat.

Nun besteht aber zwischen den Proportionen, die Theodoros benutzt haben soll, und den Verhältnisgleichungen des Hippokrates ein wesentlicher Unterschied. Hippokrates setzt z. B. das Verhältnis gleichförmiger Kreissegmente gleich dem Verhältnis ihrer Grundlinien im Quadrat oder das Verhältnis zweier Kreisumfänge gleich dem Verhältnis ihrer Durchmesser. *Immer sind die Glieder eines Verhältnisses von der gleichen Art*; niemals wird etwa eine gerade Linie mit einer krummen verglichen. Von dem Lehrsatz Euklid VII,19 konnte Hippokrates natürlich keinen Gebrauch machen.

Dagegen enthalten die Größenverhältnisse, mit denen Theodoros operiert haben soll, z. B. $e : (w - e)$ und $(w + e) : 2e$, neben einer meßbaren Strecke noch eine Strecke, deren Unmeßbarkeit vermutet und hinterher auch festgestellt wird. Eine meßbare und eine unmeßbare Strecke mußten aber von dem Zeitpunkt ab, wo man die Quadratseiten auf ihre Meßbarkeit oder Unmeßbarkeit hin untersuchte, von Theodoros als *Größen verschiedener Art* aufgefaßt werden und konnten daher nicht miteinander ins Verhältnis gesetzt werden. So wenig Hippokrates aus seinen Proportionen Produktgleichungen bilden konnte, so wenig durfte Theodoros aus seinen geometrischen Produktgleichungen Proportionen ableiten.

Wenn somit das Beweisverfahren des Herrn v. d. Waerden gegenüber Zeuthen auch einen großen Fortschritt bedeutet, so kann es aus den hier dargelegten Gründen doch nicht ganz befriedigen.

Bei künftigen Erklärungsversuchen zur Theodoros-Stelle wird man jedenfalls auf die Verwendung von Proportionen gänzlich verzichten müssen.

9. Ein weiterer Deutungsversuch zur Theodoros-Stelle (Anderhub).

Die Worte in Theaetets Bericht $\epsilon\nu\ \delta\epsilon\ \tau\alpha\upsilon\tau\eta\ \pi\omega\varsigma\ \epsilon\nu\epsilon\sigma\chi\epsilon\tau\omicron$ haben die Frage veranlaßt, weshalb Theodoros seinen Vortrag mit $\sqrt[3]{17}$ beendet hat. Ihre Beantwortung ist in letzter Zeit mit der Frage nach der Art der Zeichnungen, mit denen Theodoros seinen Vortrag erläuterte, gekoppelt worden.

Man findet vielfach die Ansicht vertreten, Theodoros habe zur Verdeutlichung seiner Ausführungen die sog. *Kettenkonstruktion* für die

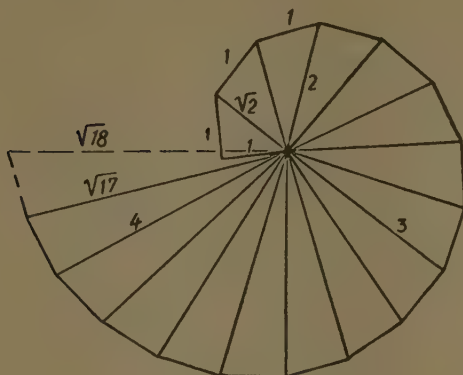


Fig. 16.

Seitenlängen der Quadrate gegeben, die 2, 3, 4, ... 17 mal so groß wie das Einheitsquadrat sind. Bei dieser Konstruktion wird durch rechtwinkliges Antragen der Strecke 1 an die Quadratseite $\sqrt{n}$ die Länge der folgenden Quadratseite $\sqrt{n+1}$ bestimmt; hierbei beginnt man mit der Seite des Einheitsquadrats (Fig. 16).

Nach J. H. Anderhub⁹⁰ hat als erster H. Schmidt⁹¹ die Kettenkonstruktion gebracht und sie bis $\sqrt{9}$ durchgeführt. Sp. Moraïtes⁹² bringt die Kettenkonstruktion bis $\sqrt{17}$. »Freilich hat Moraïtes die Bedeutung seiner eigenen Entdeckung im Rahmen der mathematik-historischen Entwicklung nicht erkannt«⁹³. Anderhub führt in seiner Abhandlung die Zeichnung bis $\sqrt{17}$ durch (ohne die Konstruktion von Moraïtes zu kennen) und schließt aus dem Aussehen der Figur⁹⁴: »Es ist ganz selbstverständlich, daß Theodoros bei $\sqrt{17}$ aufgehört hat. Nicht »zufällig«, wie seine philologischen Interpreten fast durchweg angenommen haben, auch nicht, weil die späteren Kettenbrüche viel zu schwer wurden, machte Theodoros bei $\sqrt{17}$ halt. ... $\sqrt{18}$ wäre über die Linie 1 hinausgekommen und hätte den Ausgangspunkt seiner Konstruktion verwischt, da sie ganz nahe bei 1 und in dem Feld von 1 und $\sqrt{2}$ eingreifend verlaufen wäre«. Also war es zeichentechnisch begründet, daß Theodoros bei $\sqrt{17}$ aufgehört hat.

Diese angebliche Zeichnung des Theodoros wird von Anderhub als »Genetrix irrationalium« bezeichnet; sie ist »die Stamm-Mutter irrationaler Strecken«. Mit Hilfe dieser Figur habe Theodoros den Existenzbeweis für die irrationalen Quadratseiten geführt und dann die Nichtmeßbarkeit

dieser Strecken »aufgewiesen«, indem er zunächst aus der genetrix irrationalium die jeweils anfallende Strecke »herausnahm«, in den Sand zeichnete und bei $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{5}$ rein geometrisch nachwies, daß das Antragen der Einheit nicht »aufgeht«, im Gegensatz zu $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{9}$, und $\sqrt[3]{16}$, wo sich ja die Strecke 1 ohne weiteres zwei-, drei-, viermal antragen läßt, ohne daß ein Rest bleibt«⁹⁵.

Gegen diese Auslegung der mathematischen Stelle im »Theaetetus« muß man doch starke Bedenken geltend machen.

1. Wollte Theodoros mittels der Kettenkonstruktion den Existenzbeweis für die Seiten des 3-fachen, 5-fachen bis 17-fachen Quadrats erbringen, so brauchte er die Zeichnung nicht bis zur Seite des 17-fachen Quadrats fortzusetzen. Er konnte getrost nach dem 5. oder 6. Dreieck die Konstruktion abbrechen und durfte überzeugt sein, daß seine Zuhörer die weitertragende Bedeutung der Konstruktion verstanden hatten.

2. Es ist auch nicht anzunehmen, daß Theodoros mittels Ausmessung an der Kettenkonstruktion diejenigen Fälle aussondern wollte, in denen die Seite eines größeren Quadrats durch die Einheitsstrecke meßbar ist. Daß dies eintritt, wenn die Vergrößerungszahl eine Quadratzahl ist, war geometrisch leicht einzusehen und bedurfte keiner Kettenkonstruktion.

3. Aus der genetrix irrationalium konnte Theodoros keine genauen Werte für die Seiten der Quadrate entnehmen, weil sich Ungenauigkeiten zu Beginn der Konstruktion späterhin immer stärker auswirkten. Hätte er den Beweis der Unmeßbarkeit für die Seiten bestimmter Quadrate im Anderhubschen Sinne erbringen wollen, so hätte er sicherlich die betreffende Quadratseite aus den nächstliegenden ganzzahligen Seiten konstruiert und nicht aus der genetrix irrationalium entnommen.

Vermutlich hat Sp. Moraïtes aus ähnlichen Erwägungen keine weiterreichenden Schlußfolgerungen aus der von ihm gegebenen Figur der Kettenkonstruktion gezogen.

4. Anderhub ist genau so wie Zeuthen der Ansicht, daß sich Theodoros in seinem Vortrag auf den später bei Euklid X,2 aufgeführten Lehrsatz gestützt hat. Nun war aber auf zeichnerischem Wege mittels dieses Satzes kein Ergebnis zu erzielen; denn Anderhub hat selber durch Versuche festgestellt, daß man nach mehrmaligem Abtragen der Reste bereits zu so kleinen Strecken kommt, »daß es mit dem sog. Beweisverfahren aus geometrie-technischen Gründen zu Ende geht«⁹⁶. Andererseits fehlt bei ihm die Angabe eines Kriteriums, mittels dessen Theodoros auf theoretischem Wege die Unendlichkeit des Abtragungsprozesses hätte aufweisen können. Es bleibt also bei Anderhub ungeklärt, in welcher Weise Theodoros den Satz Euklid X,2 angewendet haben könnte.

5. Das Hauptbedenken gegen Anderhubs Verfahren ist aber folgendes: *Jede geometrische Zeichnung ist notwendig mit Meßfehlern behaftet; daher läßt sich die Inkommensurabilität der Quadratseiten überhaupt nicht an Zeichnungen durch Messen und Abtragen von Strecken »aufzeigen«.* Ein solcher Gedanke lag den griechischen Mathematikern zur Zeit des Theodoros sicherlich auch ganz fern. Die geometrische Zeichnung diente ihnen als Gedächtnishilfe (zur Unterstützung der inneren Anschauung), um stets die Lagebeziehungen geometrischer Objekte zueinander gegenwärtig zu haben; keinesfalls aber benutzten sie die Zeichnung, um aus der bloßen sinnlichen Anschauung einer Figur und unter Berufung auf diese Figur mathematische Schlußfolgerungen zu ziehen⁹⁷.

Unter dem ἀποφατικῷ des Theaetet-Berichts ist demnach ein »Anschaulich machen im geistigen Sinne« zu verstehen, aber nicht ein »Sichtbar machen mittels Meßwerkzeugen«. Theodoros mußte daher versuchen, durch theoretische Erwägungen deutlich zu machen, daß der Abtragungsprozeß niemals ein Ende hat, die betreffende Quadratseite also nicht meßbar ist.

Hiernach muß man die Anderhubsche These von der »genetrix irrationalium« und ihrer Verwendung durch Theodoros als verfehlt ablehnen, weil sie sich nicht der Denkweise der alten Griechen anpaßt. Insbesondere wird auch die Erklärung, welche der Verfasser für die Beendigung des Vortrags von Theodoros bei $\sqrt{17}$ gibt, hierdurch jetzt hinfällig.

Für das Abbrechen des Vortrags bei $\sqrt{17}$ ist aber auch nicht die Schwierigkeit des behandelten Stoffes verantwortlich zu machen; denn von den auf $\sqrt{17}$ folgenden Quadratwurzeln lassen sich $\sqrt{18}$ und $\sqrt{20}$ ohne weiteres auf $\sqrt{3}$ und $\sqrt{5}$ zurückführen. $\sqrt{19}$ erfordert zwar etwas mehr Rechnung; aber man darf doch wohl Theodoros zutrauen, daß er die Beziehung $39 \cdot \sqrt{19} = \sqrt{170^2 - 1}$ finden konnte.

Übrigens läßt sich der Versuch, die Beendigung des Vortrags bei $\sqrt{17}$ irgendwie zu begründen, nur schwer mit dem Wortlaut des Berichts vereinigen. Mit der Wendung πως ἐνέσχετο bezeichnet Theaetet das Aufhören des Vortrags bei $\sqrt{17}$ doch als ein zufälliges Geschehen, für das kein ersichtlicher Grund vorlag.

Weder von philologischer noch von mathematischer Seite liegt demnach Veranlassung vor, dem Wörtchen πως einen tieferen Sinn zuzuschreiben. Diese Auffassung vertritt auch E. Sachs in ihrer Abhandlung über Theaetet⁹⁸.

In jüngster Zeit hat Herr Stamatis⁹⁹, gestützt auf zwei Stellen von Jamblichos und Plutarch, eine neue Erklärung dafür gegeben, weshalb

Theodoros seinen Vortrag mit $\sqrt{17}$ beendete. Er behauptet, »daß Platon nur aus poetischer Freiheit den Theodoros bei $\sqrt{17}$ aufhören ließ, wahrscheinlich um die Heiligkeit, die für die Pythagoreer die Zahl 17 hat, und die Bedeutung, die ihre ungleichen Teile 9 und 8 (d. h. $\frac{9}{8}$) für die Tonleiter haben, anzudeuten«. Anschließend führt er noch weitere Beispiele für die mystische Bedeutung der Zahl 17 bei den alten Griechen an. Herr Stamatidis beleuchtet mit seiner interessanten These das vorliegende Problem von einer ganz neuen Seite. Wenn man eine Erklärung für die Wendung *ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο* für erforderlich und nützlich hält, kann man seinem Deutungsversuch im Vergleich zu den bisherigen Versuchen einen hohen Grad von Wahrscheinlichkeit zuerkennen.

10. Neuer Versuch zur Deutung der Theodoros-Stelle:

Dieser Überblick über die bisherigen Versuche zur Deutung der mathematischen Stelle in Platons Dialog »Theaetetus« ergibt also folgendes Bild: Anfänglich ging man stets von der Annahme aus, den Pythagoreern sei bereits der indirekte Beweis für die Irrationalität $\sqrt{2}$ mittels des Widerspruches von Gerade und Ungerade bekannt gewesen. Dies hatte zur Folge, daß die Erklärungsversuche von Hultsch und H. Vogt mehr arithmetischer Natur waren. Zeuthen gebührt das Verdienst, daß er sich bei seinen Untersuchungen streng an den Text der mathematischen Stelle im »Theaetetus« gehalten und den geometrisch-algebraischen Charakter der Darlegungen von Theodoros nachgewiesen hat.

Wie wir sahen, machte Zeuthen gegen die These von H. Vogt geltend, die Pythagoreer hätten wahrscheinlich bereits vor Theodoros den arithmetischen Beweis für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ auf die Fälle $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ usw. verallgemeinert, ohne zu bedenken, daß sie zunächst die Eindeutigkeit der Zerlegung ganzer Zahlen in Primfaktoren hätten nachweisen müssen. Theodoros habe jedoch die Unvollständigkeit dieses Beweisverfahrens erkennt und es durch ein besseres ersetzt. Zeuthen ist weiter der Meinung, »sicherlich habe Theodoros seine neue Untersuchungsmethode in erster Linie auf $\sqrt{2}$ angewandt«¹⁰⁰, und zeigt im einzelnen, wie jener dabei vorgegangen sein könnte. Wenn dies alles wirklich zuträfe, dann hätte Platon den Theodoros seinen Vortrag mit $\sqrt{2}$ beginnen lassen müssen; denn es hätte für ihn keine Veranlassung vorgelegen, den Beweis für $\sqrt{2}$, der ebenfalls von Theodoros stammte, zu übergehen.

Da Theaetet in seinem Bericht aber mit $\sqrt[3]{3}$ beginnt, so sind wir zu der Annahme berechtigt, daß der geometrisch-algebraische Beweis für die Inkommensurabilität der Diagonale des Quadrats damals bereits bekannt war, und daß Theodoros' Leistung darin bestand, dieses Verfahren auf die Fälle $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{5}$... $\sqrt[3]{17}$ übertragen zu haben.

Was dagegen den arithmetischen Beweis für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ betrifft, so sucht man vergeblich nach einer unmittelbaren Überlieferung, welche das Vorhandensein dieses Beweises gegen Ende des 5. Jahrhunderts v. Chr. bezeugt. Es kann uns also nichts hindern, bei der Deutung der Theodoros-Stelle von der Annahme auszugehen: *Zur Zeit des Theodoros hat man den arithmetischen Beweis noch gar nicht gekannt.*

Diese beiden Annahmen über den arithmetischen und den geometrischen Beweis im Falle von $\sqrt{2}$ ergänzen sich gegenseitig auf das Glücklichsste; sie erklären auf die einfachste Weise, daß Theodoros seinen Vortrag nicht mit $\sqrt{2}$, sondern mit $\sqrt[3]{3}$ begann, und lassen sich ungezwungen mit dem Bericht des Theaetet vereinigen.

Auf eine Aristoteles-Stelle, die möglicherweise auf einen *geometrischen* Beweis hinzielt, wurde oben aufmerksam gemacht. Im übrigen bedient sich aber gerade Aristoteles sehr häufig des arithmetischen Beweises als eines Musterbeispiels für den indirekten Schluß. Man muß Herrn Anderhub beistimmen, wenn er von diesem Beweis sagt¹⁰¹: »Daraus zu schließen, daß er altes, etwa gar pythagoreisches Geistesgut sei, ist zum mindesten voreilig. Denn tatsächlich wissen wir nicht, von wem dieser Beweis stammt. Gewiß mußte ihn Aristoteles in der Platonischen Schule als bekannt voraussetzen, da er sich nur auf so kurze Andeutungen beschränkt. Er kann aber auch erst in der Platonischen Schule entstanden sein. Vielleicht stammt er sogar von Aristoteles selbst, da er ihn nicht weniger als 26 mal in seinen Schriften anführt«. Auch Herr J. E. Hofmann äußert sich in diesem Sinne¹⁰².

Die Versuche, die von Zeuthen u. a. unternommen wurden, das geometrische Beweisverfahren von Theodoros zu rekonstruieren, können in zweierlei Hinsicht nicht voll befriedigen:

1. Es wird nicht berücksichtigt, daß zur Zeit von Theodoros die bisherige Proportionslehre nicht mehr auf Größen angewandt werden durfte, die möglicherweise als inkommensurabel nachgewiesen werden konnten.

2. Die Beweisverfahren laufen auf die Entwicklung der Wurzelwerte in Kettenbrüche hinaus und erfordern zeitraubende Rechnungen, sodaß alle Fälle von $\sqrt[3]{3}$ bis $\sqrt[3]{17}$ kaum in einer Vortragsstunde besprochen werden

konnten. $\sqrt{7}$ und $\sqrt{14}$ führen zu einer Kettenbruchentwicklung mit einer viergliedrigen Periode, $\sqrt{13}$ sogar zu einer solchen mit einer fünfgliedrigen Periode. Der Nachweis, daß bei dem Abtragungsprozeß die Reihe der Reste niemals ein Ende hat, gestaltet sich um so schwieriger, je länger die zugehörige Kettenbruchperiode ausfällt.

Bei dem im dritten und fünften Abschnitt aufgezeigten neuen Beweisverfahren für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ bis $\sqrt{17}$ sind diese Mängel und Nachteile beseitigt.

Zu 1. Bei dem neuen Beweisverfahren wird die Hauptlast des Beweises mehr, als das bisher der Fall war, auf das geometrische Gebiet verlagert. Dies geschieht dadurch, daß dem Beweis nicht ein Rechteck, sondern eine Folge von Rechtecken zugrunde gelegt wird, die nach einer sehr einfachen Vorschrift konstruiert werden (oder auch nur konstruiert gedacht werden). Weil die kleinere Seite des Anfangsrechtecks gleich der Einheitsstrecke gemacht wird (von einer Ausnahme wird weiter unten noch die Rede sein), so ergeben die kleineren Seiten der aufeinander folgenden Rechtecke bei den Quadratwurzeln der ersten Gruppe die unmittelbar aufeinander folgenden Glieder der zugehörigen Reste-Reihe; bei den Quadratwurzeln, die zur zweiten Gruppe gehören, stellen die kleineren Seiten unter Überschlagnung je eines Restes den 2., 4., 6., usw. Rest dar. Weil aber die kleinere Seite eines Rechtecks immer als die Differenz aus der Diagonale und der größeren Seite des vorhergehenden Rechtecks ermittelt wird und weil die Diagonale eines Rechtecks immer größer als eine seiner Seiten ist, so nimmt die Folge der Rechtecke kein Ende. Das Gleiche gilt daher auch für die Reihe der Reste.

Es wird also hier auf geometrischem Wege ohne Benutzung von Proportionen der Nachweis erbracht, daß sich der Abtragungsprozeß ohne Ende fortsetzen läßt. Hierdurch unterscheidet sich das neue Verfahren von den früheren Verfahren, die mehr algebraisch vorgehen und Sätze aus der Proportionslehre verwenden mußten.

Zu 2. Dadurch, daß im Anfangsrechteck die kleinere Seite gleich der Einheitsstrecke und bei den Fällen der ersten Gruppe die größere Seite, bei denen der zweiten Gruppe die Diagonale gleich einem ganzzahligen Vielfachen der Einheitsstrecke gemacht wird, haben jetzt die Abtragungsvorgänge ihr algebraisches Analogon in einer Kettenbruchentwicklung, die entweder eingliedrig-periodisch oder zweigliedrig-periodisch verläuft, je nachdem der zu untersuchende Fall der ersten oder der zweiten Gruppe angehört.

Für die Quadratwurzeln der ersten Gruppe gilt nämlich allgemein die Ket-

tenbruchentwicklung $\sqrt[n^2+1]{n; 2n; \dots}$ und für die Quadratwurzeln der zweiten Gruppe entsprechend $\sqrt[n^2-1]{n-1; 1,2(n-1); \dots}$.

Indem man von der Identität $p \cdot \sqrt[n]{n} = \sqrt[p^2 \cdot n]{n}$, die den alten Griechen sicherlich geläufig war, Gebrauch macht, läßt sich das neue Verfahren auf alle Quadratwurzeln bis $\sqrt{17}$ anwenden.

Mit Hilfe der Kettenbruchentwicklung, die allerdings Theodoros noch nicht gekannt hat, können wir im Einzelfall einen Maßstab für die Einfachheit oder Kompliziertheit des eingeschlagenen Verfahrens gewinnen.

Die Kettenbruchentwicklung $\sqrt{7} = [2; 1, 1, 1, 4; \dots]$ mit einer 4-gliedrigen Periode wird bei dem neuen Verfahren ersetzt durch die Entwicklung $3\sqrt{7} = \sqrt{8^2-1} = [7; 1, 14; \dots]$ mit einer nur 2-gliedrigen Periode. In gleicher Weise tritt an Stelle von $\sqrt{14} = [3; 1, 2, 1, 6; \dots]$ die Kettenbruchentwicklung $4\sqrt{14} = \sqrt{15^2-1} = [14; 1, 28; \dots]$. Am eindrucksvollsten zeigt sich die Vereinfachung bei $\sqrt{13} = [3; 1, 1, 1, 1, 6; \dots]$ mit einer 5-gliedrigen Periode. Statt dessen untersucht man $5\sqrt{13} = \sqrt{18^2+1} = [18; 36; \dots]$ mit einer nur *eingliedrigen* Periode.

Im Falle von $\sqrt{13}$ wird man fragen, ob Theodoros nicht einfacher das Rechteck mit den Seiten 2 und 3 benutzen konnte. Dies war in der Tat möglich. Man findet nämlich ganz allgemein für eine Quadratwurzel, deren Radikand die Form $n^2 + m^2$ (n und m teilerfremde ganze Zahlen, $n > m$) hat,

$$\sqrt{n^2 + m^2} = n + m \cdot [0; \frac{2n}{m}; \dots].$$

Nur für $m = 2$ sind die Teilnenner des Kettenbruchs ganzzahlig; sonst sind sie gemischte Zahlen.

Hiernach ist $\sqrt{13} = \sqrt{3^2+2^2} = 3 + 2 \cdot [0; 3; \dots]$. Man erhält also auch auf diesem Wege einen Kettenbruch mit einer nur *eingliedrigen* Periode. Der geometrische Beweis hierfür am Rechteck mit den Seiten 2 und 3 bereitet keine Schwierigkeit.

Die Festlegung der Maße für das Anfangsrechteck verlangte jedenfalls von Theodoros weniger algebraische und geometrische Überlegungen als die Aufstellung der ersten vier, fünf oder mehr Glieder der Reste-Reihe, wenn er etwa nach der Methode von Zeuthen vorgegangen wäre. Bei dem hier entwickelten Verfahren erhielt er die aufeinander folgenden Reste ohne weitere Rechnung auf geometrischem Wege, da durch die Vorschrift für die Konstruktion der Folge von Rechtecken gewährleistet

wurde, daß sich der Abtragungsprozeß in den späteren Rechtecken in der gleichen Weise wiederholte wie im Anfangsrechteck.

Diese Vereinfachung des Verfahrens ermöglichte es Theodoros, sein Thema in einem etwa einstündigen Vortrag zu behandeln.

Nach unserer Annahme hat Theodoros die Irrationalitätsbeweise für $\sqrt[3]{3}$ bis $\sqrt[3]{17}$ auf zwei Gruppen verteilt, als deren typische Vertreter er zunächst $\sqrt[3]{3}$ und $\sqrt[3]{5}$ eingehender besprach. Dies steht im Einklang mit dem Bericht des Theaetet, wonach Theodoros zuerst von dem dreifachen und fünffachen Quadrat aufgezeigt hat, daß ihre Seiten inkommensurabel sind. Die bisherigen Erklärungsversuche scheinen mir diese Stelle des Berichts nicht genügend zu berücksichtigen.

Als Theodoros sodann die andern Quadrate einzeln vornahm (*καὶ ἄλλων ἐκείστην προαιρούμενος*), brauchte er sie nur in eine der beiden Gruppen einzuordnen; ein nochmaliges »Aufzeigen« der Nichtmeßbarkeit wie bei $\sqrt[3]{3}$ und $\sqrt[3]{5}$ erübrigte sich jetzt. Das Wort *ὅτι* im Bericht soll offenbar ausdrücken, daß sich der Irrationalitätsnachweis für die folgenden Wurzeln auf die gleiche Weise wie bei $\sqrt[3]{3}$ bzw. $\sqrt[3]{5}$ durchführen läßt.

Mit den einleitenden Worten *περὶ δυνάμεων* hat Theaetet das Thema des Vortrags von Theodoros angegeben. Manche wollen *δύναμις* wegen der folgenden Ausführungen mit »Quadratseite« wiedergeben. Dies ist aber nicht unbedingt erforderlich. Das Wörtchen *μήτε* weist ja später darauf hin, daß als Subjekt des Nebensatzes nur die *Quadratseiten* gemeint sein können.

Aus allen diesen Überlegungen ergibt sich schließlich folgende freie Übersetzung der Theodoros-Stelle:

Unser Theodoros trug uns über Quadrate vor und erläuterte seinen Vortrag durch geometrische Zeichnungen. Er machte uns klar, daß die Seiten der Quadrate mit 3 und mit 5 Quadratfuß Fläche nicht mit der Seite des Einheitsquadrats meßbar sind. Indem er die weiteren Quadrate der Reihe nach einzeln vornahm, zeigte er, daß sich das Gleiche auch bei ihnen ebenso (nämlich wie beim 3- und 5-fachen Quadrat) nachweisen läßt. So kam er bis zu dem Quadrat von 17 Quadratfuß; bei diesem hörte er zufällig auf.

Dieser Deutungsversuch zur Theodoros-Stelle ist wie alle früheren nur hypothetischer Natur. Daß Theodoros bei seinem Vortrag den hier beschriebenen Weg eingeschlagen hat, läßt sich weder beweisen noch widerlegen. Man ist also darauf angewiesen, nach den Wahrscheinlichkeitsgründen zu forschen, die für oder gegen unsere Darstellung sprechen. Von den Gründen der ersteren Art wurde, wie es in der Natur der Unter-

suchung liegt, ausgiebig Gebrauch gemacht. Hier werde abschließend noch auf einen Grund eingegangen, der *gegen* die hier vorgetragene These zu sprechen scheint, nämlich auf die Tatsache, daß der geometrische Beweis des Theodoros durch keinerlei Überlieferung bezeugt wird. Wahrscheinlich trägt der Beweis selbst die Hauptschuld daran. Die Beweismethode des Theodoros leidet ja, wie schon oben gesagt wurde, an einem wesentlichen Mangel: es fehlt die Begründung dafür, daß beim Übergang zu immer kleineren Rechtecken die kleinere Seite eines Rechtecks schließlich kleiner als eine vorgegebene Strecke ε wird. Wir wissen nicht, ob Theodoros hier einen Ausweg gesucht und gefunden hat. Möglicherweise hat er sich damit beholfen, daß er den Lehrsatz, den wir jetzt bei Euklid X,1 finden, als Axiom ausgesprochen hat.

Aber noch ein andrer Mangel haftet dem Beweisversuch des Theodoros an. Auf *dem* Wege, den er eingeschlagen hatte, konnte er nach dem damaligen Stande mathematischen Wissens niemals zu einem *allgemeinen* Beweis für die Irrationalität der Quadratwurzeln aus Nichtquadratzahlen vorstoßen, was letzten Endes doch das Ziel seiner Anstrengungen sein mußte. Mit seinem Beweisverfahren, das immer nur Einzelfälle erfaßte, konnte höchstens bei ihm und seinen Zuhörern die *Überzeugung* hervorgerufen und befestigt werden, daß hier ein allgemeines Gesetz für irrationale Zahlen vorlag; aber die Gesetzmäßigkeit zu *beweisen* vermochte er auf diese Weise nicht¹⁰³. Trotzdem gebührt Theodoros ein großes Verdienst um die Entwicklung der Lehre vom Irrationalen: er hat durch seine Untersuchungen »aufgezeigt«, daß mindestens bis zur Zahl $\sqrt{17}$ die Quadratwurzeln von Nichtquadratzahlen irrational sind, und dadurch hat er seinen Schülern, namentlich Theaetet, den Anstoß zu weiteren Forschungen in dieser Richtung gegeben.

So hat also der Beweisversuch des Theodoros in einen später nicht mehr betretenen Seitenweg geführt. Theaetets Verdienst ist es, daß er, sobald er die Mängel der Beweisführung von Theodoros erkannt hatte, entschlossen die alten Pfade verließ und auf einem neuen Wege das Theorem bewies, das ihm sein Lehrer in jenem denkwürdigen Vortrag angedeutet hatte.

Die schöpferische Leistung Theaetets hat die Vorarbeiten seines Lehrers in den Schatten gestellt. Von dem geometrischen Beweisversuch des Theodoros wurde nicht mehr gesprochen, nachdem Theaetet auf einem anderen Wege zum Ziele gelangt war.

So wird es vielleicht verständlich, daß uns von dem Beweis des Theodoros keine Überlieferung vorliegt.

ANMERKUNGEN

I

1. Erweiterte Fassung eines Vortrags, gehalten am 6.X.1955 auf der mathematikgeschichtlichen Tagung des Mathematischen Forschungsinstituts »Lorenzenhof« bei Oberwolfach (Baden).
2. Euclidis Elementa, ed. J. L. Heiberg, III, Leipzig 1886, S. 408 ff.
3. H. Rademacher und O. Toeplitz, Von Zahlen und Figuren, Berlin 1930, S. 158.
4. O. Becker und J. E. Hofmann, Geschichte der Mathematik, Bonn 1951, S. 51 u. 57.
5. H. G. Zeuthen, Die Mathematik im Altertum und im Mittelalter, Die Kultur der Gegenwart, III, 1, Leipzig-Berlin, 1912, S. 38.
6. J. L. Heiberg, Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaften im Altertum, München 1925, S. 3 f.
7. E. Sachs, Die fünf Platonischen Körper, Berlin 1917, S. 152.
8. Theonis Smyrnaei Expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium, ed. Ed. Hiller, Leipzig 1878, S. 43 f.
9. Procli Diadochi in Platonis rem publicam commentarii, ed. W. Kroll, Leipzig 1901, II, S. 24 f.
10. Fr. Hultsch, Die Pythagoreischen Reihen der Seiten und Diagonalen von Quadraten und ihre Umbildung zu einer Doppelreihe ganzer Zahlen, Bibl. Math. (3) 1, Leipzig 1900, S. 11.
11. Weitere Literatur: E. Stamatis, *Ἀριθμοὶ τέλειοι, πλευρικοί, διαμέτρικοι. Π*
√2, Platon, 4. Jahrg., Athen 1952, S. 289–297 und
Ders., *Εὐκλείδου γεωμετρία - θεωρία ἀριθμῶν*, II, Athen 1953, S. 8–22.

II

12. Procli Diad., a. a. O., S. 27 f.
13. Procli Diad., a. a. O., S. 28 f.
14. Procli Diad., a. a. O., S. 27, 2–4.

III

15. J. E. Hofmann, Geschichte der Mathematik I, Berlin 1953, S. 26.
16. Herr Stamatis wendet in seinen Untersuchungen über die Seiten- und Durchmesserzahlen (Abhdlg. in »Platon«, S. 296 f., Euklid-Ausg., II, S. 12 f.) auch die Umkehrung des Konstruktionsverfahrens an; er verfolgt dabei aber einen andern Zweck als wir.
17. H. G. Zeuthen, Sur la constitution des livres arithmétiques des Éléments d'Euclide et leur rapport à la question de l'irrationalité, O(versigt over de k.) D(anske) V(idenskabernes) S(elskabs) Forhandling(er), Kopenhagen 1910, S. 423. Diese Abhandlung wird im folgenden als Zeuthen I zitiert.
18. H. G. Zeuthen, Sur l'origine historique de la connaissance des quantités irrationnelles, ODVS, Kopenhagen 1915, S. 345 ff. Die Abhandlung wird im folgenden als Zeuthen II zitiert.
19. J. L. Heiberg, Mathematisches zu Aristoteles, Abhdlg. z. Gesch. d. math. Wiss., 18. Heft, Leipzig 1904, S. 24.

20. Ἀριστοτέλους τοῦ Στρατηγότου τὰ σωζόμενα, Graece et Latine ed. Julius Paccius, excud. Guillelmus Laemarius (ohne Ortsangabe) 1597, I, S. 107.
21. Ἀριστ. τοῦ Στρατ., a. a. O., S. 163.
22. Th. Heath, Mathematics in Aristotle, Oxford 1949, S. 30 f.

IV

23. Proklos Diadochos, Kommentar zu Euklids Elementen I. Buch, deutsch von L. Schönberger, ed. M. Steck, Halle 1945, S. 212 f.
24. H. Vogt, Die Entdeckungsgeschichte des Irrationalen nach Plato und anderen Quellen des 4. Jahrhunderts, Bibl. Math. (3), 10, Leipzig 1910, S. 141.
25. J. E. Hofmann, a. a. O., S. 28.
26. H. Vogt, a. a. O., S. 126.
27. Ivo Bruns, Das literarische Porträt der Griechen, Berlin 1896, S. 247.
28. I. Bruns, a. a. O., S. 241.
29. H. Vogt, a. a. O., S. 117 ff.
- 29a. H. Vogt, a. a. O., S. 127.
30. Zeuthen I., S. 398.
31. E. J. Dijksterhuis, De Elementen van Euclides, Groningen 1929/30, I, S. 17.
32. E. Sachs, De Theaeteto Atheniensi mathematico, Berlin 1914, S. 10f.
33. E. Sachs (Anm. 7), S. 76 ff.
34. W. Jäger, Paideia III, Berlin 1947, S. 30.
35. K. Reidemeister, Die Arithmetik der Griechen, Hamburger Math. Einzelschr., 26. Heft, Leipzig u. Berlin 1940, S. 13: »... kann ich mich des Verdachts nicht erwehren, daß Theaetet der Mathematiker nur eine Legende ist, die sich um den Theaetet des platonischen Dialogs kristallisiert hat«.
36. Platonis opera recognovit Ioannes Burnet, Oxford [1905], I, 147 d 3–6.
37. H. Schmidt, Kritischer Commentar zu Platos Theaetet, Jahrbücher f. class. Philol., 9. Suppl. – Bd., Leipzig 1877/78, S. 403–565 und
Ders., Exegetischer Commentar zu Platos Theaetet, ebd., 12. Suppl.-Bd., Leipzig 1881, S. 77–190.
Diese Abhandlungen werden im folgenden als Schmidt I u. Schmidt II zitiert.
38. Schmidt I, S. 441.
39. Platonis dialogi Graece et Latine ex rec. J. Bekkeri, II, 1, Berlin 1817, S. 186.

V

40. H. Vogt, a. a. O., S. 105 f.
41. Zeuthen I, S. 422.
42. G. Junge, Wann haben die Griechen das Irrationale entdeckt? Novae Symbolae Joachimicae, Halle 1907, S. 225 f.
43. H. Vogt, a. a. O., S. 111.
44. Platonis op., IV, 53 c 4 f.
45. Platonis op., IV, 54 b 4–5.
46. Zeuthen I, S. 421 f. und Zeuthen II, S. 346.

47. H. Hasse und H. Scholz, Die Grundlagenkrise der griechischen Mathematik, Kantstudien, XXXIII, Berlin 1928, S. 28.
48. Herr J. E. Hofmann hat, wie ich aus einem mir übersandten Mskr., das aus dem Jahre 1949 stammt, ersehe, bereits früher den gleichen Gedankengang verfolgt wie den hier mitgeteilten. Statt der Rechtecke hat er aber die entsprechenden rechtwinkligen Dreiecke verwandt. Es wäre sehr erwünscht, daß seine Abhandlung, die in Einzelheiten von der vorliegenden Darstellung abweicht und manches kürzer und einfacher bringt, baldigst erschiene.

VI

49. Procli Diad., a. a. O., S. 24 und 28.
50. Theonis Smyrn., a. a. O., S. 43.
51. Archimedis op. omn., ed. J. L. Heiberg, I², Leipzig 1910, S. 236, 2–5.
52. Platonis op., IV, 546 c.
53. Procli Diad., a. a. O., S. 28.
54. Theonis Smyrn., a. a. O., S. 44 f.
55. Th. Heath, Archimedes' Werke, deutsch von Fr. Kliem, Berlin 1914, S. 83.
56. Th. Heath, a. a. O., S. 72–93.
57. J. E. Hofmann, Über die Annäherung von Quadratwurzeln bei Archimedes und Heron, Jahresber. d. DMV XLIII, Leipzig-Berlin 1933/34, S. 187–210 und Ders. Über ein »neues« Verfahren zur Annäherung von Quadratwurzeln und seine geschichtliche Bedeutung, Dtsch. Math., 6. Jahrg., Leipzig 1942, S. 453–461.

VII

58. Fr. Hultsch, Die Näherungswerte irrationaler Quadratwurzeln bei Archimedes, Nachr. d. Ges. d. Wiss. in Göttingen, Göttingen 1893, S. 376–384.
59. Fr. Hultsch, a. a. O., S. 382.
60. Fr. Hultsch, a. a. O., S. 384.
61. H. Vogt, a. a. O., S. 101.
62. H. Vogt, a. a. O., S. 105 f.
63. H. Vogt, a. a. O., S. 106 f.
64. Hier wird von der Proportionslehre Gebrauch gemacht. Dies war zu Aristoteles' Zeit berechtigt; dem Theodoros aber war die Anwendung noch versagt. Der Beweis läßt sich auch ohne Benutzung von Proportionen durchführen.
65. H. Vogt, a. a. O., S. 107.
66. H. Vogt, a. a. O., S. 107 f.
67. Platonis op., III, 82 c.
68. E. Sachs, Diss. de Theaeteto, S. 57.
69. Archimedis op. omn., I², S. 4, 5–9.
70. Archimedis op. omn., II², Leipzig 1913, S. 430, 2–9.
71. J. H. Anderhub, Genetrix irrationalium, Platonis Theaetetus 147 d, Joco-Seria aus den Papieren eines reisenden Kaufmanns, gewidmet den Freunden des Hauses Kalle & Co., Wiesbaden-Biebrich 1904, S. 209 und 213.

- 72. B. L. van der Waerden, *Ontwakende wetenschap*, Groningen 1950, S. 159.
- 73. Anderhub, a. a. O., S. 199.
- 74. J. L. Heiberg (Anm. 6), S. 3.

VIII

- 75. Zeuthen I, S. 418.
- 76. H. Vogt, a. a. O., S. 106.
- 77. Zeuthen II, S. 422.
- 78. Zeuthen II, S. 422: »D'après les répliques du dialogue, elles (les démonstrations de Théodore) semblent avoir eu une forme plus géométrique que celles de Théétète-Euclide, et il faut croire qu'elles se rattachaient aux notions introduites par Théodore«.
- 79. Zeuthen I., S. 423 f.
- 80. Bei Zeuthen wird im Text und in Fig. 1 auf S. 424 statt L der Buchstabe E ein zweites Mal verwendet.
- 81. J. E. Hofmann, Über Herrn Anderhubs Deutung der Theodoros-Stelle in Platons Theaetet, *Dtsch. Math.*, 7. Jahrg., Leipzig 1942, S. 119.
- 82. Zeuthen II, S. 346 ff.
- 83. T. Bonnesen, Sur la théorie des nombres irrationnels de l'antiquité, *Periodico di Matematiche*, Bologna 1912, I, S. 16.
- 84. H. Hasse u. H. Scholz (Anm. 47), S. 28 f.
- 85. H. Hasse, *Proben mathematischer Forschung*, Frankfurt a. M. – Pinneberg 1955, S. 40 f.
- 86. Van der Waerden, a. a. O., 160 f.
- 87. Ich weiche bei der Bestimmung des letzten Restes etwas von der Darstellung Herrn v. d. Waerdens ab. Auf dem hier beschrittenen Wege erhält man nämlich bei der letzten Wegnahme den Quotienten 2 und kann sofort den periodischen Kettenbruch für $\sqrt[3]{3}$ aufstellen: $\sqrt[3]{3} = [1; 1,2; \dots]$ mit der zweigliedrigen Periode 1,2.
- 88. Van der Waerden, a. a. O., S. 159.
- 89. Van der Waerden, a. a. O., S. 146 f.

IX

- 90. Anderhub, a. a. O., S. 195 ff.
- 91. Schmidt I, S. 441 und Schmidt II, S. 91.
- 92. *Σπυρίδων Μοραΐτης*, Neugriech.-kommentierte Ausgabe *Πλάτων*, III, Leipzig 1913, S. 188. Ich verdanke Herrn Stamatis die Kenntnis der betr. Stelle aus dem mir nicht zugänglichen Buche von Moraites.
- 93. Anderhub, a. a. O., S. 222, Anm. 56.
- 94. Anderhub, a. a. O., S. 205 f.
- 95. Anderhub, a. a. O., S. 213 f.
- 96. Anderhub, a. a. O., S. 210.
- 97. Vgl. O. Toeplitz, Der derzeitige Stand der Forschung in der Geschichte der griechischen Mathematik, *Sem.-Ber., Math. Seminar Münster i. Westf.*, 6. Sem., Winter 1934/35, S. 10.

98. E. Sachs, Diss. de Theaeteto, S. 50.
 99. E. Stamatis, Über die mathematische Stelle des Theaetetus von Platon, Athen 1956, Abh. d. Athener Akad. d. Wiss. 31, S. 10–16, griechisch mit deutscher Zusammenfassung.

X

100. Zeuthen II, S. 348.
 101. Anderhub, a. a. O., S. 174.
 102. J. E. Hofmann (Anm. 15), S. 30.
 103. Wollte Theodoros sein Verfahren verallgemeinern, so mußte er zeigen, daß sich $n \cdot p^2$ für ein beliebiges n als $q^2 + 1$ oder $q^2 - 1$ darstellen läßt, je nachdem der Beweis zur 1. oder 2. Gruppe gehört. Er hätte also die Lösbarkeit der Fermatschen Gleichung $q^2 - n \cdot p^2 = \mp 1$ für ein beliebiges n beweisen müssen. Dafür fehlten aber sicherlich den griechischen Mathematikern des 5. Jahrhunderts noch die Voraussetzungen.

Nachtrag

Nachdem die vorstehenden Untersuchungen abgeschlossen waren, erhielt ich Kenntnis von der Abhandlung des Herrn Stamatis *Συμβολὴ εἰς τὴν ἔρευναν τῆς γεωμετρικῆς ἀλγεβρας τῶν Πυθαγορείων* (Ein Beitrag zur Untersuchung der geometrischen Algebra der Pythagoreer), Athen 1955, Abh. d. Athener Akad. d. Wiss., 30, S. 262–282, griechisch mit englischer Zusammenfassung.

Nach der Ansicht des Herrn Stamatis hat Archimedes seine Näherungswerte für $\sqrt[3]{3}$ dadurch erhalten, daß er die Methode der Berechnung von $\sqrt[3]{2}$ mittels einer Folge von *Quadraten* auf eine Folge von *Rauten* erweitert hat. Herr Stamatis baut diese Methode dann weiter aus zur Berechnung von $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{6}$... $\sqrt[3]{17}$ und erwähnt in diesem Zusammenhang auch die Theodoros-Stelle in Platons »Theaetetus«. Ein näheres Eingehen auf die interessanten Ergebnisse würde hier zu weit führen und muß daher einer späteren Untersuchung vorbehalten bleiben.

ERGÄNZENDE BEMERKUNGEN
ZUM »GEOMETRISCHEN« IRRATIONALITÄTSSBEWEIS
DER ALTEN GRIECHEN

*Herrn Siegfried Heller zur Vollendung seines 80. Lebensjahres]
am 1. XII. 1956 gewidmet*

von

Jos. E. Hofmann*

Mit der vorstehenden Abhandlung hat Herr Heller einen sehr wertvollen Beitrag zur Deutung der so heiss umstrittenen Theodoros-Stelle im Platonischen Dialog Theaetetus geliefert. Meiner Überzeugung nach übertrifft seine auch historisch ausgezeichnet fundierte Wiederherstellung alle anderen bisherigen Versuche. Ich möchte noch drei kurze Ergänzungen zu Artikel 6 der Hellerschen Abhandlung anfügen. Die erste bezieht sich auf das Problem der Seiten- und Diagonalzahlen. Die zweite handelt von der Konstruktion der durch Kettenbruchentwicklung entstehenden Näherungswerte für quadratische Irrationalitäten. Die dritte enthält meinen Wiederherstellungsversuch für die Archimedischen Näherungswerte für $\sqrt{3}$ in neuer Fassung.

I. ÜBER DIE FIGUR DER SEITEN- UND DIAGONALZAHLEN

Das von Herrn Heller aus Theon von Smyrna und Proklos entnommene Verfahren zur Bestimmung immer grösser werdender Seiten- und Diagonalzahlen, d. h. der aufeinanderfolgenden Lösungspaare x_k, y_k der Gleichung

$$(1,1) \quad x^2 - 2y^2 = 1$$

in natürlichen Zahlen, lässt sich mit Abb. 1 in Verbindung bringen. Hier ist in das Feld eines 45° -Winkels ein gebrochener Streckenzug $A_0B_0A_1B_1A_2B_2 \dots$ eingepasst, dessen Teilstücke aufeinanderfolgend teils auf die Schenkel, teils auf Lote zu diesen Schenkeln fallen. Um den Aufbau des

* Ichenhausen.

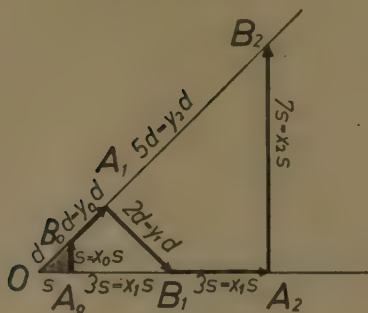


Abb. 1.

Streckenzuges zu verfolgen und gleichzeitig zweckmässige Bezeichnungen einzuführen, setzen wir

$$\begin{aligned} OA_0 = A_0 B_0 = s = x_0 s; \quad OB_0 = B_0 A_1 = d = y_0 d = y_0 s \sqrt{2}; \\ A_0 B_1 = B_1 A_2 = 3s = x_1 s; \quad A_1 B_1 = 2d = y_1 d = y_1 s \sqrt{2}; \\ A_2 B_2 = 7s = x_2 s; \quad A_1 B_2 = B_2 A_3 = 5d = y_2 d = y_2 s \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Nun greifen wir irgendeines der Vierecke $A_k B_k A_{k+1} B_{k+1}$ heraus. Ist k gerade (Abb. 2), dann ist

$$\begin{cases} A_k B_k = x_k s; & B_k A_{k+1} = y_k d = y_k s \sqrt{2}; \\ A_k B_{k+1} = x_{k+1} s; & A_{k+1} B_{k+1} = y_{k+1} d = y_{k+1} s \sqrt{2}. \end{cases}$$

Ist aber k ungerade (nicht eigens illustriert), dann ist

$$\begin{cases} B_k A_{k+1} = x_k s; & A_k B_k = y_k d = y_k s \sqrt{2}; \\ A_{k+1} B_{k+1} = x_{k+1} s; & A_k B_{k+1} = y_{k+1} d = y_{k+1} s \sqrt{2}. \end{cases}$$

In beiden Fällen ergibt sich sogleich aus der Figur

$$(1,2) \quad \begin{cases} x_{k+1} = x_k + 2y_k \\ y_{k+1} = x_k + y_k \end{cases}.$$

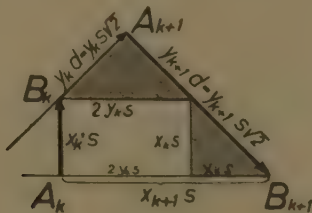


Abb. 2.

Weiterhin ist $x_k^2 + x_{k+1}^2 = 2(y_k^2 + y_{k+1}^2)$; also

$$-(x_{k+1}^2 - 2y_{k+1}^2) = x_k^2 - 2y_k^2 = -(x_{k-1}^2 - 2y_{k-1}^2) = \dots = (-1)^k(x_0^2 - 2y_0^2).$$

Nun ist aber $x_0 = 1, y_0 = 1$, also

$$(1,3) \quad x_k^2 - 2y_k^2 = (-1)^{k+1}.$$

Folglich führt unsere Figur genau auf die aufeinanderfolgenden Lösungspaare der Gleichung (1,1).

Die nur verderbt auf uns gekommene Schilderung bei Proklos, deren zugehörige Figur fehlt, lässt sich nach geringfügiger Textverbesserung durch unsere Abbildung 1 illustrieren. Aus dieser Figur ergibt sich weiterhin schon beim blossen Ansehen

$$(1,4) \quad \begin{cases} x_{k+1} = x_{k-1} + 2x_k \\ y_{k+1} = y_{k-1} + 2y_k \end{cases}.$$

Die natürlichen Zahlen x_{k+1}, y_{k+1} sind also größer als das Doppelte der natürlichen Zahlen x_k, y_k . Aus (1,3) folgt, dass $\sqrt{2}$ durch x_k/y_k mit zunehmendem k immer besser angenähert wird. Unter Verwendung von (1,1) und (1,2) erhalten wir

$$(1,5) \quad \frac{x_{k+1}}{y_{k+1}} - \frac{x_k}{y_k} = (-1)^k \cdot \frac{1}{y_k y_{k+1}}.$$

Folglich können wir x_k/y_k als Stammbruch-Aggregat darstellen:

$$(1,6) \quad \frac{x_k}{y_k} = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 12} - \frac{1}{12 \cdot 29} \pm \dots$$

Diese Entwicklung, die eigentlich ganz im Interessengebiet der Griechen gelegen gewesen wäre, ist uns jedoch nicht aus der Antike überliefert und scheint erst im 17. Jahrhundert entdeckt worden zu sein.¹

Das Bildungsgesetz der Gleichungen (1,2) gilt jedoch unverändert auch dann, wenn wir mit irgendeinem Paar ganzer Zahlen x_0, y_0 beginnen, vorausgesetzt, dass nicht etwa x_0 und y_0 gleichzeitig Null sind. Jetzt muss (1,3) ersetzt werden durch

$$(1,3^*) \quad x_k^2 - 2y_k^2 = (-1)^k(x_0^2 - 2y_0^2).$$

¹ Die Reihe findet sich z. B. im Brief W. E. v. Tschirnhausens an Leibniz vom 17. IV. 1677. Siehe Leibniz: Briefwechsel mit Mathematikern, ed. C. I. Gerhardt, Berlin 1899, S. 334.

(1,4) bleibt unverändert; anstelle von (1,5) tritt

$$(1,5^*) \quad \frac{x_{k+1}}{y_{k+1}} - \frac{x_k}{y_k} = (-1)^{k+1}(x_0^2 - 2y_0^2) \cdot \frac{1}{y_k y_{k+1}}.$$

Fassen wir die beiden Gleichungen (1,2) zusammen wie folgt:

$$\begin{aligned} x_{k+1} \pm y_{k+1} \sqrt{2} &= (x_k \pm y_k \sqrt{2}) (1 \pm \sqrt{2}) = \\ &= (x_{k-1} \pm y_{k-1} \sqrt{2}) (1 \pm \sqrt{2})^2 = \dots, \end{aligned}$$

dann erhalten wir schliesslich

$$(1,6) \quad x_k \pm y_k \sqrt{2} = (x_0 \pm y_0 \sqrt{2}) (1 \pm \sqrt{2})^k$$

und hieraus

$$(1,7) \quad x_k^2 - 2y_k^2 = (-1)^k(x_0^2 - 2y_0^2).$$

Diese Formel besagt folgendes: Kennen wir *ein* Lösungspaar x_0, y_0 der Gleichung $x^2 - 2y^2 = q$ in ganzen Zahlen x_0, y_0 , dann lassen sich daraus unendlich viele weitere vermöge (1,2) oder (nach Herstellung des Paares x_1, y_1) vermöge (1,4) finden. Und zwar können wir sowohl von Paaren in natürlichen Zahlen x_0, y_0 zu solchen in *grösseren* wie auch in *kleineren* ganzen Zahlen kommen. Es gibt aber ein Lösungspaar in kleinstmöglichen ganzen Zahlen (dem Betrage nach), und dieses Paar lässt sich sowohl rechnerisch wie auch geometrisch herstellen.

Jetzt sind wir mitten in Gedankengängen, wie sie im Kreis um Fermat entwickelt wurden: B. Frenicle gibt die Regel für die Herstellung der Lösungspaare der Gleichung $x^2 - 2y^2 = 7$ in natürlichen Zahlen², ausgehend von den Lösungspaaren $3^2 - 2 \cdot 1^2 = +7$ und $1^2 - 2 \cdot 2^2 = -7$. Fermat zeigt — wie immer viel tiefergehend — in einer sehr seltenen kleinen Druckschrift des Jahres 1658, dass die Gleichung $x^2 - 2y^2 = -q$ (q natürliche Zahl und als Differenz einer Quadratzahl und einer doppelten Quadratzahl dargestellt) genau auf *eine* Weise in kleinsten natürlichen Zahlen x_0, y_0 so aufgelöst werden kann, dass $0 < x_0 < y_0$ wird³.

Fermat kannte die von I. Boulliau besorgte griechisch-lateinische Ausgabe des Theon von Smyrna (Paris 1644); er hat sogar wohldurchdachte

² Brief an Fermat vom 6.IX.1641. Siehe P. de Fermat: Œuvres II, Paris 1894, ed. P. Tannery — Ch. Henry, S. 240.

³ Vgl. J. E. Hofmann: Neues über Fermats zahlentheoretische Herausforderungen von 1657, Berlin 1944 (Abhandlungen der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1943, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Nr. 9), S. 41/44 (Edition) und S. 32/35 (Erklärung und Bedeutung).

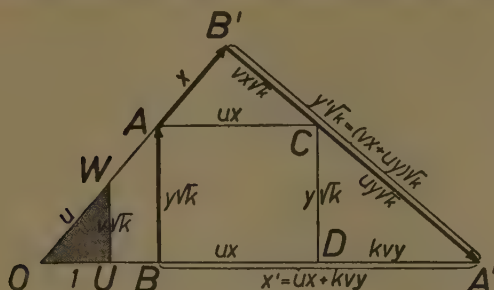


Abb. 3.

kritische Bemerkungen zu dieser Ausgabe hinterlassen⁴. Ob Fermat auch von der Proklos-Stelle wusste, ist bisher noch ungeklärt. Es ist also durchaus möglich, dass Fermat aus der Kenntnis der Seiten- und Diagonalzahlen wichtige Anregungen geschöpft hat. Dass seine Überlegung auch *geometrisch* ausgedeutet werden könnte, blieb ihm wohl unbewusst.

II. ÜBER DIE ALLGEMEINE FERMATSCHES GLEICHUNG

Das Bisherige lässt sich nunmehr verallgemeinern: haben wir ein Lösungspaar u, v der Gleichung

$$(2,1) \quad x^2 - ky^2 = +1 \quad (k \text{ natürliche Nichtquadratzahl})$$

in natürlichen Zahlen, dann lässt sich aus einem Lösungspaar x, y der Gleichung

$$(2,2) \quad x^2 - ky^2 = q \quad (q \neq 0, \text{ ganz})$$

in natürlichen Zahlen ein weiteres Lösungspaar x', y' in natürlichen Zahlen auf Grund einer geometrischen Überlegung ermitteln, die jener zu Abb. 1 durchaus entspricht. Wir konstruieren (Abb. 3) zunächst das rechtwinklige Dreieck OUW aus den Seiten $OU = 1$, $OW = u$, $UW = v\sqrt{k}$. Dann konstruieren wir das rechtwinklige Dreieck OBA im Feld des Winkels $\sphericalangle O UW$ so, dass $AB = y\sqrt{k}$ parallel zu WU wird, und tragen $AB' = x$ aus A auf der verlängerten OA an. Hierauf schneiden wir die verlängerte OB mit dem Lot zu OB' durch B' in A' . Schliesslich ziehen wir $AC \parallel OA'$ und $CD \parallel AB$. Das Dreieck $AB'C$ entsteht aus dem Dreieck OUW , indem wir dessen Seiten x mal nehmen:

⁴ Vgl. hierzu den Brief von S. de Fermat an P. Pellisson mit Mitteilungen aus dem Nachlass von P. de Fermat, abgedruckt in dessen *Œuvres* I, 1891, S. 378/89.

$AC \# BD = ux$; $B'C = vx \sqrt{k}$. Dreieck CDA' entsteht aus Dreieck OUW , indem wir dessen Seiten $y \sqrt{k}$ mal nehmen: $CA' = uy \sqrt{k}$; $DA' = kvy$. Setzen wir jetzt $\begin{cases} x' = BA' = ux + kvy, \\ y' \sqrt{k} = A'B' = (vx + uy) \sqrt{k}, \end{cases}$

dann erhalten wir

$$(2,3) \quad \begin{cases} x' = ux + kvy \\ y' = vx + uy \end{cases}.$$

Jetzt ist $AA'^2 = x'^2 + ky'^2 = x^2 + ky'^2$, also $x'^2 - ky'^2 = x^2 - ky^2 = q$, wie es sein sollte. Der Übergang von x, y zu x', y' wird also vermittelt

durch die Substitution

	x	y
x'	u	kv
y'	v	u

Diese sehr anschauliche Konstruktion lässt sich fortsetzen, wenn wir x' nunmehr von A' aus nach rechts ansetzen (Endpunkt: B'') und dann die verlängerte AB' mit dem Lot zu BB'' durch B'' in A'' schneiden: $B'A'' = x''$; $A''B'' = y'' \sqrt{k}$. Jetzt ist $\frac{x + x''}{2x'} = \frac{u}{1}$. Spiegeln wir ausserdem das Viereck $ABA'B'$ an A' in $\bar{A}B''A'\bar{B}'$ (Abb. 4), dann ergibt sich weiterhin $\frac{y + y''}{2y'} = \frac{u}{1}$, also

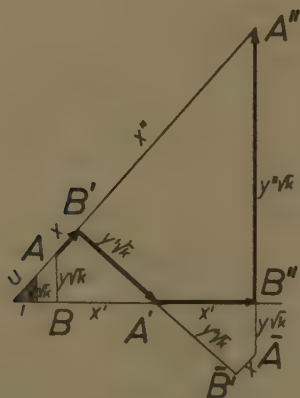


Abb. 4.

$$(2,4) \quad \begin{cases} x'' = 2ux' - x \\ y'' = 2uy' - y \end{cases}.$$

Aus (2,3) folgt $x' > x$, $y' > y$ und wegen (2,4) auch $x'' > 2x'$; $y'' > 2y'$. Weiterhin ergibt sich wegen (2,2) aus (2,3)

$$(2,5) \quad \frac{x'}{y'} - \frac{x}{y} = -\frac{vq}{yy'}.$$

Daraus lässt sich wiederum ein Stammbruch-Aggregat zur Darstellung von $\sqrt{k}$ entwickelt. Ausserdem ergibt sich aus (2,3) $x' \pm y' \sqrt{k} = (u \pm v \sqrt{k})(x \pm y \sqrt{k})$. Wird dies formal fortgesetzt, dann erhalten wir die sämtlichen ganzzahligen Lösungspaare der Gleichung (2,2), falls k Primzahl ist. Ausserdem können wir auch durch Zurückgehen das Lösungspaar in absolut kleinstmöglichen ganzen Zahlen angeben.

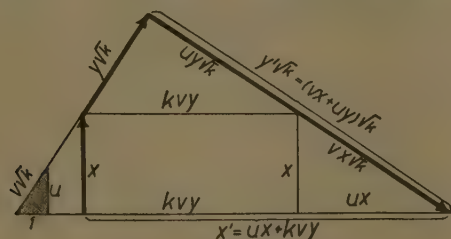


Abb. 5.

Wie das alles aussieht, wenn wir ein Lösungspaar u , v der Gleichung (2,1*)

$$x^2 - ky^2 = -1$$

in natürlichen Zahlen kennen, das lässt sich unmittelbar aus Abb. 5 entnehmen. Am Rande sei vermerkt, dass wir sowohl schrittweise in fortwährender Wiederholung der Abb. 3 und 5 zum Ziel kommen können, wie auch durch Zusammenfassen dieser mehrfach anzuwendenden Teilfiguren zu einer einzigen.

Natürlich spielt der Fall $q = \pm 1$ eine ausgezeichnete Rolle; denn jetzt können wir je nach Lage der Dinge $u = x_0$, $v = y_0$ setzen, d. h. aus einem einzigen bekannten Lösungspaar der Gleichung $x^2 - ky^2 = \pm 1$ alle anderen möglichen in natürlichen Zahlen bestimmen.

Entgegen der von zahlreichen älteren Autoren vertretenen gegenteiligen Meinung muss ausdrücklich gesagt werden, dass die Griechen die Kettenbruchentwicklung *nicht* gekannt haben. Das geht schon daraus hervor, dass ein so handliches Rechenverfahren wie das der Kettenbruchentwicklung

nicht so leicht hätte verloren gehen können. Zumindest bei den Indern oder bei den Muslimen, denen noch wesentlich mehr an griechischen Original-Arbeiten vorgelegen hat als uns heute zur Verfügung steht, hätte es wieder auftauchen müssen. Wie stark die Tradition bei Rechenverfahren ist, dafür gibt es mehrere sehr aufschlussreiche Beispiele. Ein besonders merkwürdiges ist die Weitergabe der ägyptischen *mediatio*, die sich – sowohl für das praktische Rechnen auf dem Brett wie vermittels der Ziffern gänzlich überflüssig – doch bis ins späte Mittelalter hinein gehalten hat. Übrigens möchte ich vermuten, dass die Anregung zur Behandlung der Gleichungen $(2,1^*)$ bzw. $(2,1)$ bei den Indern vermittels der Methode der *Zerstäubung*⁵ irgendwie schon auf Theon bzw. Proklos zurückgeht.

III. ZUR BESTIMMUNG DER ARCHIMEDISCHEN NÄHERUNGSWERTE FÜR $\sqrt[3]{3}$

Obwohl ich glauben darf, die Entstehung der Archimedischen Näherungen für $\sqrt[3]{3}$ aus der Kreisrechnung aufgeklärt zu haben (vgl. hierzu etwa Heller, Anmerkung 57), sind doch erneute Wiederherstellungsversuche auf Grund der Kettenbruchentwicklung vorgenommen worden⁶. Diese Wiederherstellungsversuche können vor allem deshalb nicht befriedigen, weil sie die Frage offen lassen, warum Archimedes als untere Schranke den 9., jedoch als obere Schranke den 12. Näherungswert bei Verwendung des Ausgangspaares $x_1 = 1, y_1 = 1$ der Gleichung $x^2 - 3y^2 = -2$ wählt. Natürlich könnte man diesen Einwand durch die Bemerkung entkräften, dass die untere Schranke der 3. und die obere Schranke der 4. Näherungswert bei Verwendung des Ausgangspaares $x_1 = 5, y_1 = 3$ der vorigen Gleichung ist. Dieser Ausweg ist jedoch wegen der erheblichen gedanklichen Schwierigkeiten, die seiner Verwendung entgegenstehen, bisher noch niemals ernstlich in Erwägung gezogen worden. Ich stelle mir die Sache ein wenig anders vor. Meiner Ansicht nach hat sich Archimedes

⁵ Bei Brahmagupta. Die wichtigsten einschlägigen Belegstellen sind aufgezählt bei J. Tropfke: Geschichte der Elementarmathematik III². Berlin/Leipzig 1937, S. 192, Fussnote 766.

⁶ Ich erwähne aus letzter Zeit: Zivojin Čulum: Par quel procédé Archimedes avait-il évalué le resultat $\frac{265}{153} < \sqrt[3]{3} < \frac{1351}{780}$? Bull. soc. math. phys. Serbie 6, 1954, S. 108/11

(Serbisch mit französischer Zusammenfassung) und Evangelos Stamatis: Geometrischer Beweis der Archimedischen Näherungswerte für $\sqrt[3]{3}$, Athen 1955 (Abh. d. Athener Akad. d. Wiss. 30, S. 255/62, griechisch mit deutscher Zusammenfassung).

zunächst das Näherungspaar $\frac{5}{3} < \sqrt{3} < \frac{7}{4}$ verschafft, um dann jeweils in einem *einzig*en Schritt die neuen Schranken zu bestimmen. Das Verfahren könnte folgendermassen ausgesehen haben:

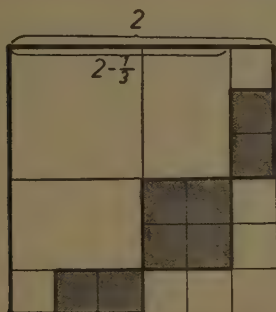


Abb. 6.

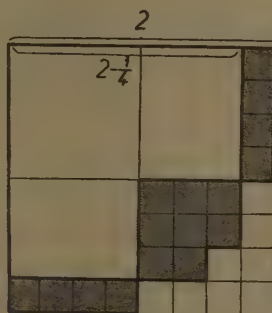


Abb. 7.

1. Schritt: Herstellung der Ausgangsnäherung in der Form

$$2 - \frac{1}{3} < \sqrt{3} < 2 - \frac{1}{4}$$

Wir beginnen (Abb. 6) mit einem Quadrat der Seitenlänge 2 und nehmen von ihm ein Quadrat der Seitenlänge 1 weg. Die Restfläche, der stark umrahmte Gnomon, umfasst 3 Flächeneinheiten. Nun zerlegen wir das weggenommene Quadrat in 9 kongruente Quadrate der Fläche $\frac{1}{9} = (\frac{1}{3})^2$, nehmen dann von jedem der beiden Eckquadrate des Gnomon wie in der Figur je 2 Quadrate der Fläche $2 \cdot \frac{1}{9}$ weg (in der Figur durch Tönung angedeutet) und legen sie in der Mitte wieder an, wo wir vorhin das Einheitsquadrat weggeschnitten hatten. Ergebnis: die Fläche $(2 - \frac{1}{3})^2$ ist um $2 \cdot \frac{1}{9}$ kleiner als die Fläche 3. Folglich ist $2 - \frac{1}{3} < \sqrt{3}$. Entsprechend gehen wir in Abb. 7 vor, um zu zeigen, dass $\sqrt{3} < 2 - \frac{1}{4}$ ist. Diesmal müssen wir das wegzunehmende Einheitsquadrat in 16 kongruente Quadrate der Fläche $\frac{1}{16} = (\frac{1}{4})^2$ zerlegen. Das Umlegeverfahren geht wohl aus Abb. 7 deutlich genug hervor.

2. Schritt: Das mutmasslich Archimedische Lemma

Wir gehen aus von Abb. 8. Im Kreis des Durchmessers AB ist das Mittellot MU und das Lot FC zu AB gelegt. Nun wird UC mit AB in N

geschnitten und dann auf dem Lot FC die Strecke $FV = MU$ gemacht. Schliesslich wird UV mit AB in S geschnitten. Ist $AF > FB$, dann ist

$$(3,1) \quad \left(\frac{AS}{SB} \right)^2 < \frac{FA}{FB}.$$

Da nämlich S näher an M liegt als an A (weil es so gemacht wurde), ist sicher $\frac{AS}{SB} < \frac{AN}{NB}$. Da ferner NC den rechten Winkel $\sphericalangle ACB$ halbiert

(Anwendung von Euklid III,27), ist $\frac{AN}{NB} = \frac{AC}{CB}$ (Euklid VI,3). Nun ist aber

$$\begin{cases} AC^2 = AB \cdot AF \\ CB^2 = AB \cdot FB \end{cases} \quad (\text{Euklid I,47});$$

also $\frac{AC^2}{CB^2} = \frac{AF}{FB}$. Folglich gilt durch Zusammenbauen die Behauptung

(3,1). Wollen wir den Satz (3,1) in Worten aussprechen, wie das ja ebenfalls der griechischen Ausdrucksweise entsprechen würde, dann könnte das so lauten: Wird eine Strecke AB durch den Punkt M in gleiche und durch den Punkt F in ungleiche Teile geteilt und MF durch den Punkt S halbiert, dann ist das Verhältnis $AF:FB$, falls grösser als 1:1, auch grösser als das Quadrat des Verhältnisses von $AS:SB$. Dieser Satz möge das *mutmasslich Archimedische Lemma* heissen. Setzen wir $AM = MB = a$ und $MS = SF = x$, dann ist

$$\begin{cases} AS = a + x; & AF = a + 2x \\ SB = a - x; & FB = a - 2x \end{cases}.$$

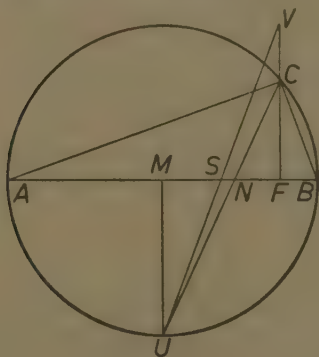


Abb. 8.

Voraussetzung: $0 < 2x < a$. Jetzt ist (3,1) gleichwertig mit

$$(3,2) \quad \frac{a+x}{a-x} < \sqrt{\frac{a+2x}{a-2x}}.$$

Wir würden das mutmasslich Archimedische Lemma rein algebraisch auf anderem Wege so gewinnen:

Hilfssatz: Sind a, x, y drei positive Grössen und ist $x + y < a$, dann ist

$$(3,3) \quad \frac{a+x}{a-x} \cdot \frac{a+y}{a-y} < \frac{a+x+y}{a-x-y}.$$

Dieses Ergebnis folgt unmittelbar aus der ersichtlich richtigen Ungleichung $\frac{a(a+x+y)+xy}{a+x+y} < \frac{a(a-x-y)+xy}{a-x-y}$ durch Umformen und

Umstellen. Vermittels $y = x$ wird (3,3) zu (3,2). Übrigens kommt die Anwendung von (3,2) dem Übergang von einem rationalen Näherungswert für eine quadratische Irrationalität zu einem besseren gleich, der dem ersten in einer Kettenbruchentwicklung an *dritter* Stelle folgt. Dies

erkennen wir, indem wir $\left(\sqrt{\frac{a+2x}{a-2x}} - 1\right)^3 > 0$ verwenden und ausrechnen. Der zweite Näherungswert dieser Kettenbruchentwicklung folgt aus

$$\left(\sqrt{\frac{a+2x}{a-2x}} - 1\right)^3 > 0. \text{ Er ist } \frac{a}{a-2x} = 1 + \frac{2x}{a-2x} \text{ und sicher grösser}$$

als $\frac{a+2x}{a-2x}$. Unser dritter Näherungswert ist

$$\frac{a+x}{a-x} = 1 + \frac{2x}{a-2x} - \frac{2x^2}{(a-x)(a-2x)}.$$

Bei zweckmässiger Führung der Rechnung ist $x = 1$ und a gerade; wir haben also eine rechnerisch recht günstige Entwicklung vor uns. Besonders vorteilhaft ist es, dass sich diese Näherung schrittweise verbessern lässt und zur Darstellung der gesuchten Irrationalität in Form eines sehr rasch konvergierenden unendlichen Produktes führt, das auch rechnerisch leicht behandelt werden kann⁷. Übrigens ist (3,2) keineswegs nur auf Quadrat-

⁷ Hierfür verweise ich auf die von Herrn Heller zitierte Abhandlung von 1942 (dort Anm. 57), wo ich am Ende einige diesbezügliche Andeutungen gemacht habe.

wurzeln beschränkt; durch Anwenden des Hilfssatzes (3,3) auf eine grössere Gliederzahl erhalten wir als Gegenstück zu der sog. Bernoullischen Ungleichung⁸

$$(3,4) \quad \left(\frac{a+x}{a-x}\right)^n < \frac{a+nx}{a-nx} \text{ für ganze } n > 1; 0 < nx < a.$$

3. Schritt: Anwendung zur Annäherung von $\sqrt[3]{3}$

Wir hatten bereits gefunden: $\frac{5}{3} < \sqrt[3]{3} < \frac{7}{4}$. Es ist aber $\frac{3 \cdot 3^3}{5^2} = \frac{27}{25} = \frac{52+2}{52-2}$. Mit $a = 52$, $x = 1$ erhalten wir also aus (3,2) $\frac{53}{51} < \frac{3\sqrt[3]{3}}{5}$ oder $\frac{265}{153} = \frac{5 \cdot 53}{3 \cdot 51} < \sqrt[3]{3}$. Damit ist die untere Schranke von Archimedes

für $\sqrt[3]{3}$ rechnerisch wie auch durch Übergang zu einer Figur wie in Abb. 8 geometrisch ermittelt.

Ferner ist $\frac{7^3}{3 \cdot 4^2} = \frac{49}{48} = \frac{194+2}{194-2}$. Mit $a = 194$, $x = 1$ erhalten wir also aus (3,2) $\frac{195}{193} < \frac{7}{4\sqrt[3]{3}}$ oder $\sqrt[3]{3} < \frac{7 \cdot 193}{4 \cdot 195} = \frac{1351}{780}$. Damit ist auch

die obere Schranke von Archimedes für $\sqrt[3]{3}$ sowohl rechnerisch wie auch geometrisch ermittelt.

Wer sich die (bestimmt nur verstümmelt überkommene) Archimedische Kreisrechnung genauer ansieht, wird zugestehen müssen, dass Überlegungen der soeben vorgebrachten Art durchaus in den Rahmen der Archimedischen Abhandlung passen würden.

⁸ Die sog. Bernoullische Ungleichung lautet so: Ist n ganz und grösser als 1 und x positiv, dann ist $(1+x)^n > 1+nx$. Sie findet sich in etwas anderer Form ausgesprochen in prop. 4 der ersten Reihendissertation Jakob Bernoullis, die am 17.VI.1689 von J. J. Fritz verteidigt und im nämlichen Jahr in Basel gedruckt wurde. Wiederdruck in den Opera, ed. G. Cramer, Genf, 1744, S. 388, deutsch von G. Kowalewski in Ostwalds Klassikern Nr. 171, Leipzig 1909, S. 5/6. Die Ungleichung findet sich jedoch bereits in I. Barrow: Lectiones geometricae, London 1670, 7. Vorlesung, § 13/16. Von dort hat Bernoulli die Ungleichung entnommen, jedoch ohne Hinweis auf die Vorlage, weil das damals bei »allgemein bekannten« Sätzen nicht üblich war.

4. Spuren des mutmasslich Archimedischen Lemmas bei Heron

Wir wissen heute ziemlich genau über die Näherung quadratischer Irrationalitäten bei den alten Griechen Bescheid⁹. Am überraschendsten sind die zahlreichen Näherungsrechnungen bei Heron. Dessen Methode kommt auf das schon den alten Babyloniern bekannte Verfahren des arithmetisch-geometrischen Mittels hinaus, das im wesentlichen mit der

Ungleichung $\sqrt{a^2 + B} < a + \frac{B}{2a}$ übereinstimmt und mit dem Übergang

von einem rationalen Näherungswert für eine quadratische Irrationalität zum nächstfolgenden vermöge der Kettenbruchentwicklung gleichwertig ist. Bei Heron finden sich jedoch weitere Beispiele – und zwar gerade die bestausgeführten Näherungen –, die mittels dieses Verfahrens *nicht* erklärt werden können. Es sind dies die folgenden:

$$(a) \sqrt{3} < 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{15} = \frac{26}{15}; \quad (b) \sqrt{135} < 11 + \frac{1}{2} + \frac{1}{14} + \frac{1}{21} = \frac{244}{21};$$

$$(c) \sqrt{216} < 14 + \frac{2}{3} + \frac{1}{33} = \frac{485}{33}; \quad (d) \sqrt{1575} < 39 + \frac{2}{3} + \frac{1}{51} = \frac{2024}{51};$$

$$(e) \sqrt{6300} < 79 + \frac{1}{3} + \frac{1}{34} + \frac{1}{102} = \frac{4048}{51}.$$

Ich habe seinerzeit festgestellt, dass diese Näherungen dem nämlichen Typus angehören, und sie gemeinsam erklärt vermittels der Ungleichung

$$(3,5) \quad \sqrt{x^2 - 1} < x - \frac{1}{2x - 1} + \frac{1}{(2x - 1)(2x + 1)} \quad \text{mit ganzen } x \geq 2.$$

Diese Ungleichung ist nichts anderes als ein Sonderfall des mutmasslich Archimedischen Lemmas. Der rationale Näherungswert lässt sich nämlich auf die Form $x \cdot \frac{4x^2 - 3}{4x^2 - 1}$ bringen. Nun bilden wir

$$\sqrt{\frac{x^2}{x^2 - 1}} = \sqrt{\frac{(4x^2 - 2) + 2}{(4x^2 - 2) - 2}} > \frac{4x^2 - 1}{4x^2 - 3}$$

⁹ Wegen der näheren Einzelheiten und weiterer ergänzender Literatur verweise ich auf meine Abhandlung von 1934, die von Herrn Heller a. a. O. zitiert wird.

und haben die Näherung vor uns. Tatsächlich ergibt sich (a) aus $\sqrt{\frac{4}{3}} > \frac{15}{13}$, (b) aus $\sqrt{\frac{16}{15}} > \frac{63}{61}$, (c) aus $\sqrt{\frac{25}{24}} > \frac{99}{97}$, (d) aus $\sqrt{\frac{64}{63}} > \frac{255}{253}$ und

(e) aus (d) durch Verdoppeln. Hier liegt ersichtlich eine feste Rechenmethode vor. Was Heron noch wusste und geschickt anzuwenden vermochte, war dem viel späteren Eutokios anscheinend nicht mehr geläufig.

Leider findet sich bei Heron kein einziges Beispiel, das über die Formel (3,5) hinausgeht, wie im Archimedischen Fall $\sqrt{3} > \frac{265}{153}$. An diesem Bei-

spiel findet sich nämlich eine wichtige Besonderheit vor. Es lässt sich vermittels der Kettenbruchmethode nur dann erklären, wenn wir zugestehen, dass die Griechen inzwischen auch Gleichungen wie $x^2 - 3y^2 = -2$ behandelt haben, d. h. Gleichungen des allgemeinen Typus $x^2 - ky^2 = q$. Und gerade das ist es, was ich für sehr *unwahrscheinlich* halte; denn es gibt bisher kein anderes Beispiel aus der Antike, das diesem Typus angehört. Deshalb lege ich so grossen Wert auf das mutmasslich Archimedische Lemma. Dieses Lemma ist keineswegs gekünstelt, sondern ganz einfach gebaut – einfach vor allem unter dem Gesichtspunkt, dass die Griechen nicht von der *Gleichung* ausgingen, sondern vom *Verhältnis*. Ich sehe in der Ungleichung (3,2) eigentlich etwas sehr Naheliegendes, und auch die geometrische Herleitung an Hand der Abb. 8 scheint mir keine Schwierigkeiten zu bieten, wenn man sich nur hinreichend in die geometrischen Methoden der Alten eingefunden hat. Bei Archimedes wird das Zahlenverhältnis in den Vordergrund gestellt; bei Heron haben wir die für Näherungen zweckmässigere Stammbruchform der einzelnen Werte. Vielleicht ist das Herons eigene zusätzliche Erfindung.

Das ist es, was ich ergänzend zu den sehr schönen Entwicklungen von Herrn Heller hinzugefügt haben möchte.

THE ARABIC OPTICAL MSS. IN THE BRITISH ISLES

(*Mathematical and Physical Optics*)

by

H. J. J. Winter*

In the present paper a survey is made of those Arabic optical MSS. in the British Isles which deal specifically with physical and mathematical problems. Works on medical or physiological optics, although such do exist, as in the British Museum,¹ have for the moment been excluded, as have also the considerable number of astronomical MSS. which incorporate some optical knowledge. From a technical standpoint, therefore, the details which follow will be of greatest interest to the historian of physics.

The MSS. are to be found in the Bodleian Library, Oxford, the Library of the India Office in London, and the John Rylands Library in Manchester; most of them are copies of the treatises by Ibn al-Haitham (965–1039 A.D.) and Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī (1201–1274 A.D.), whilst there are two very interesting works, one by Al-Kindī (d. c. 873 A.D.) and the other by Taqī al-Dīn Muḥammad ibn Zain al-Dīn Ma'rūf (1525–1585 A.D.). Thus almost the whole period of Arabic optics is effectively covered, whilst certain significant advances made by Ibn al-Haitham in the study of the camera obscura and in optical refraction are represented. It is impossible here to record a critical appreciation of each work, but it is hoped to do so in separate papers: several such are in preparation or have already appeared, and particulars will be found below under the appropriate MS.

Mediaeval Islamic optics rested initially upon a Greek foundation, and whilst the majority of Arab and Persian scientists were satisfied with, or were unable to improve upon, this legacy, the few possessed of acute observation and experimental leaning succeeded in making discoveries which are some of the finest in mediaeval science. Of the MSS. which

* University College of the South West of England, Exeter.

clearly represent the Greek origins are Al-Kindī's delightful little treatise, of only two folios, *On the Cause of the blue colour of the sky*, a unique MS. so far located only in the Bodleian, and the two editions of the *Optics* of Euclid. These latter are also of special interest in that one of them, a revision of Thābit ibn Qurra (d. 901 A.D.) of the version made by Ishāq ibn Ḥunain ibn Ishāq, represents the earlier Islamic period, whilst the other composed nearly four hundred years later, is the version of Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī, completed in 1253 A.D. just prior to the Mongol dominion.

A word about Naṣīr al-Dīn will serve to illustrate still further the persistence of Greek ideas. Naṣīr al-Dīn had a great veneration for Euclid, and his outlook was essentially geometrical, that of the *geometry* of rays. The neglect of the *physical* phenomenon is clearly seen in his unsuccessful attempt to explain refraction². It seems also probable that Naṣīr al Dīn was cut off, owing to the unsettled times in which he lived, from the knowledge of the more advanced optical researches of Ibn Al-Haitham already over two centuries extant. On Al-Kindī, who died as early as 873 A.D., I will make no dogmatic statement, pending the careful comparison of his fragment on the blue of the sky with the colour theories of the Greeks and of Job of Edessa (in his Syriac encyclopaedia *The Book of Treasures*), apart from saying that the study of such natural phenomena had absorbed Aristotle in *Meteorologica* and *De Mundo*, and that Al-Kindi was undoubtedly working under the influence of Aristotelian ideas. Nevertheless, Al-Kindī was also capable of considerable originality on his own part and it is necessary to discover whether he can claim any real advance.

With Ibn Al-Haitham such a question does not arise. His treatise *On the form of the eclipse* is the first work in which the mathematical treatment of the camera obscura is to be found. It is a brilliant analysis of the physical phenomena in terms of mathematics. The much earlier Chinese observations of the *Mo Ching* are confined to the physical appearance of the image. The two further MSS. of Ibn Al-Haitham dealing with spherical and paraboloidal mirrors reveal an equally valuable mathematical treatment, based upon the *Conics* of Apollonius, and the former contains the first geometrical construction for the phenomenon of spherical aberration. Finally, the discursive essay *On Light* indicates that Ibn Al-Haitham had some inkling of the principle of least time later enunciated by Fermat. It also gives in general terms Ibn Al-Haitham's ideas on refraction, a subject in which he excelled.³

A catalogue of the fifteen MSS.⁴ is now set forth, the authors being in

chronological order. In the case of the Bodleian MSS. both the MS. number according to Uri's catalogue (in Roman numerals) and that of the original collection—Selden or Marsh—are given. As the history of each MS. is of considerable interest this history has been briefly indicated; it is useful, therefore, to remember that MSS. were bequeathed to the Bodleian Library by John Selden in 1654 and by Narcissus Marsh, Archbishop of Armagh, in 1713. A large proportion of the latter's formerly belonged to the Dutch orientalist, Jacob Golius.

OPTICS (*Mathematical and Physical*)

YA 'QŪB IBN ISHĀQ AL-KINDĪ

Arabic

Oxford, Bodleian. Arabic MS. DCCCLXXVII (13) (MS. Seld. A. 32). Ff. 396–398.
MS. 25.3 cm × 16.4 cm. Bought in Damascus, 1235 A.D. (see note on flyleaf of MS.).

On the cause of the blue colour of the sky.

This is a very rare MS. and may be unique.

No Figs.

Inc. A statement by Ishāq al-Kindī to some of his colleagues about the reasons for the azure in the sky, for it is thought to be the colour of the sky.

May God preserve you and give you success. What I wish to explain is what is seen when one looks at the azure colour in the sky, for it is thought that it is the (true) colour of the sky. I refer to what I think is quite sufficient for you, according to your position with respect to the place at which you are looking, and to your understanding. Thus with God's help we hope to succeed in this, for upon Him we depend.

Expl. Then it is quite clear that this colour is not the (true) colour of the sky, but is something else equally important, and which is like the darkness appearing to our eyes if we look at the objects which are illuminated at sunrise, from behind a coloured transparent earthly body; whence we see what lies beyond it has a colour compounded of the colour of the glass and the colour of the object we are looking at from behind the glass. And that is what you asked about, and explains, so to speak, the azure which is seen in the appearance of the sky.

May God grant your most important decisions fulfilment. The essay is complete, and thanks be to God. And may His blessings be upon our prophet Muḥammad and all his kindred, and peace be with him.

H. J. J. Winter and M. S. Wahby. A paper is now being prepared on this manuscript. Bibliothecae Bodleianae Codicum Manuscriptorum Orientalium Catalogus a Joanne Uri confectus. Pars prima, Oxonii, 1787, p. 190.

ISHĀQ IBN ḤUNAIN IBN ISHĀQ - THĀBIT IBN QURRA

Arabic.

Oxford, Bodleian. Arabic MS. DCCCLXXV (6). (Seld. A. 45).

MS. 26 cm × 19 cm. Copied at Hamah, 1319 A. D. (A. H. 719). Bequeathed to the Bodleian by John Selden, 1654.

The Book of Optics of Euclid.

Ishāq ibn Ḥunain ibn Ishāq's version of the Optics of Euclid, revised by Thābit ibn Qurra.

(Ishāq ibn Ḥunain ibn Ishāq, Abū Ya'qūb, son of Ḥunain ibn Ishāq al-'Ibādī.)

73 Figs.

Inc. In the Name of God, the Compassionate, the Merciful. We ask help of God.

A description of vision by Euclid, which comprises 64 diagrams. The eye receives light from the firmament through transparent bodies which lie between the eye and the firmament, such as the air and similar bodies. The light coming from the firmament to the eye seems in fact to come from the eye itself and to be projected outwards from it.

Expl. (The eye is assumed to be at R, a point vertically above the point of intersection H of the diagonals AD, BJ of a square ABDJ, i. e. HR is perpendicular to the plane of the square. We give end of proof as follows.)

... then the light rays RA, RB, RD, RJ are equal, and because they are equal, and the sides of the square are equal, and the two diagonals, then the angles at R subtended by the vertical and all the lines which go from R to the corners of the square are also equal. And the diagonals are equal.

So what we intended to explain is now completed, and thanks be to God. The Book of Optics is complete, and thanks be to God always, who gives us understanding; and may his blessings be upon Muḥammad—upon whom be peace.

J. L. Heiberg and H. Menge. *Euclidis opera omnia*, 8 vols., Leipzig, 1883–1916 (Vol. VII, Optics, 1895).

H. J. J. Winter and W. 'Arafat. Cf. Rylands Arabic MS. 350 D (IV).

Bibliothecae Bodleianae Codicum Manuscriptorum Orientalium Catalogus a Joanne Uri confectus. Pars prima, Oxonii, 1787, MS. DCCCLXXI (6), p. 188.

Also cf. R. Dozy, P. de Jong, M. J. de Goeje, *Catalogus Cod. Orient. Bibl. Acad. Lugd.-Batav.*, 6 vols. Leiden, 1851–1877, MS. 976.

S. E. Assemanus, *Catalogus MSS. Orient. Bibl. Medic.-Laurent et Palat.*, Florence, 1742, MS. Palat. 271, 286.

AL-ḤASAN IBN AL-ḤASAN IBN AL-HAITHAM

Arabic.

London, India Office. Arabic MS. 734 (III). (Old no. MS. 1270 (III)). Ff. 10v–12. MS. 11" × 4½". Probably XVII cent. Library of Richard Johnson, East India Company.

On the Light of the Heavenly Bodies.

Contains a lucid argument showing that the planets and fixed stars are self-luminous, on the assumption that they do not exhibit a shadow or partial eclipse as in the case of the moon.

No Figs.

Inc. In the name of God, the Compassionate, the Merciful. A discourse by Al-Ḥasan ibn Al-Ḥasan ibn Al-Haitham on the light of the stars.

Some of those who profess philosophy may think that the light of the stars is acquired from the light of the sun, and that these bodies are not luminous in themselves; and this is because of what has been established in their minds concerning the light of the moon.

Expl. Thus it has become evident from all that we have explained that all the planets are self-luminous, because of a property which is intrinsic in each planet and not because of an external factor affecting it from without, except only in the case of the moon. And that belief of those who think otherwise concerning it is a false one, which is no longer tenable on the examination of what we have stated; and that is what we wished to explain in this treatment.

The essay on the planets is complete, thanks be to God, Lord of the Universe, and blessings be upon His prophet Muḥammad and all his kindred.

- E. Wiedemann. Über das Licht der Sterne (Wchschr. für Astronomie, Meteorol. und Geogr., 1890).
 H. J. J. Winter and W. 'Arafat. The Light of the Heavenly Bodies: a short discourse by Ibn Al-Haitham (to appear in Journ. Roy. As. Soc. Bengal).
 Arabic text in: Rasā'il Ibn Al-Haitham (Dā'iratu'l-Ma'ārif-il-Osmānia. Hyderabad, Deccan), 1938.
 O. Loth. Cat. Arabic MSS. India Office Lib., Lond., 1877, p. 212.
 J. Uri. Cat. Bodl., Oxon., 1787, i. p. 190, MS. DCCCLXXVII (7).
 W. Ahlwardt. Verzeichnis der arabischen Handschriften der Königl. Bibliothek zu Berlin, 5 vols. 1893. MS. No. 5668.

AL-ḤASAN IBN AL-ḤASAN IBN AL-HAITHAM

Arabic.

Oxford, Bodleian. Arabic MS. DCCCLXXVII (7). (MS. Seld. A. 32.) Ff. 253-261.
 MS. 25 cm × 16.7 cm. Bought in Damascus, 1235 A.D. (see note on flyleaf of MS.)

On the Light of the Heavenly Bodies.

Contains a lucid argument showing that the planets and fixed stars are self-luminous, on the assumption that they do not exhibit a shadow or partial eclipse as in the case of the moon.

No Figs.

Inc. As in India Office Arabic MS. 734 (III).

Expl. Ditto.

- E. Wiedemann. Über das Licht der Sterne (Wchschr. für Astronomie, Meteorol. und Geogr., 1890).
 H. J. J. Winter and W. 'Arafat. The light of the Heavenly Bodies: a short discourse by Ibn Al-Haitham (to appear in Journ. Roy. As. Soc. Bengal).
 Arabic text in: Rasā'il Ibn Al-Haitham (Dā'iratu'l-Ma'ārif-il-Osmānia, Hyderabad, Deccan), 1938.
 Bibliothecae Bodleianae Codicum Manuscriptorum Orientalium Catalogus a Joanne Uri confectus. Pars prima, Oxonii, 1787, p. 190.
 O. Loth. Cat. Arabic MSS. India Office Lib., London 1877, p. 212.
 W. Ahlwardt. Verzeichnis der arabischen Handschriften der Königl. Bibliothek zu Berlin, 5 vols. 1893. MS. No. 5668.

AL-ḤASAN IBN AL-ḤASAN IBN AL-HAITHAM

London, India Office. Arabic MS. 734 (IV). (Old no. MS. 1270 (iv)). Ff. 12v-17.
MS. 11" × 4½". Probably XVII cent. Originally in Library of Richard Johnson, East
India Company.

On light.

Discusses sources of light, reflected light, absorption, linear propagation, atmospheric refraction, elementary ideas on refraction.

2 Figs.

Inc. In the Name of God, the Compassionate, the Merciful. An essay by Al-Ḥasan ibn Al-Ḥasan ibn Al-Haitham on light. Discussion about the nature of light belongs to the physical sciences, and discussion about the manner in which light shines requires mathematics, because of the lines which the light follows. So also, talking about the nature of a ray is part of the physical sciences, whilst talking about its form and appearance is part of the mathematical sciences.

Expl. Imagine two transparent objects of different transparency, and that rays passed, one through each of them, such that both rays subtended, together with the two perpendiculars proceeding from the two points of refraction, two equal angles of incidence; then if the two rays were refracted—one object being denser than the other—such that the refraction in the denser object occurred along a line of different position, and the two rays subtended, together with the two perpendiculars, two different angles within the dense objects, that in which the smaller angle occurred is the more transparent. (Contrast with modern theory. H. J. J. W.) These are all the ideas which are explained in this essay, and so it is time to end the essay and ask help of God. The essay on light is complete, thanks be to God, Lord of the Universe, and peace be upon the noblest of His creatures, Muḥammad, and all his kindred.

J. Baarmann. Abhandlung über das Licht von Ibn Al-Haitham (Zeitschrift der deutschen morgenländischen Ges., XXXVI, 195-237, 1882). Also printed separately, Halle, 1882.

H. J. J. Winter and W. 'Arafat. Ibn Al-Haitham on Light. (to appear Journ. Roy. As. Soc. Bengal, Calcutta).

Arabic text in: Rasā'il Ibn Al-Haitham (Dā'iratu'l-Ma'ārif-il-Osmānia, Hyderabad, Deccan), 1938.

O. Loth. Cat. Arabic MSS. India Office Lib., Lond., 1877, p. 213.

Also cf. W. Ahlwardt, Kat. d. Berliner Königl. Bibliothek, V, No. 6018, p. 355.

AL-ḤASAN IBN AL-ḤASAN IBN AL-HAITHAM
Arabic.

Oxford, Bodleian. Arabic MS. DCCCLXXVII (2) (Seld. A. 32). Ff. 161-199.
MS. 25 cm × 16.7 cm. Bought in Damascus, 1235 A.D. (see note on flyleaf of MS.).

On the Form of the Eclipse.

The first mathematical treatment of the camera obscura.

According to the scribe he made this copy from an original in the hand of Ibn Al-Haitham.

5 Figs.

Inc. In the Name of God, the Compassionate, the Merciful. A discourse by Al-Ḥasan ibn Al-Ḥasan ibn Al-Haitham on the characteristics of the eclipse.

If we examine the image of the light of the sun when it is under eclipse, when the light emerges from a small circular hole on to a screen opposite to the hole, it will be like a crescent. Thus if the eclipse is not total then the image of the sun has a crescent form. This does not occur in the case of the eclipse of the moon.

Expl. The light of the moon, when the moon is a crescent, does not appear in a crescent form when it emerges from the hole, since if it is eclipsed (partially) the light emerging from the hole is completely circular. And it becomes clear that in the case of the eclipse of the sun the light of the sun may be either of a crescent form or a circular form. And this is what we intended to explain in this essay.

The essay is complete, and thanks be to God who is worthy to be thanked. I copied from his (Ibn Al-Haitham's) manuscript, and thanks be to God.

E. Wiedemann. Erste Erwähnung der Dunkelkammer (Jahrbuch für Photographie, XXIV, 12-13, 1910).

Über die Camera Obscura (Sitzungsberichte der phys.-mediz. Societät in Erlangen, XLVI, 155-169, 1914).

H. J. J. Winter and W. 'Arafat. Cf. India Office Arabic MSS. 734 (XIII), 767 (II).

Bibliothecae Bodleianae Codicum Manuscriptorum Orientalium Catalogus a Joanne Uri confectus. Pars prima, Oxonii, 1787, MS. DCCCLXXVII (2), p. 190.

Cf. also O. Loth. Cat. Arabic MSS. India Office Lib., Lond., 1877, pp. 213, 222.

St. Petersburg. Cat. des MSS. et xylographes orient. de la Bibl. Imp. de St. Pétersbourg, 1852, MS. 192 (II).

AL-HASAN IBN AL-HASAN IBN AL-HAITHAM

Arabic.

London, India Office. Arabic MS. 734 (XIII). (Old no. MS. 1270 (XIII)). Ff. 79-86.
MS. 11" × 4½". Probably XVII cent. Library of Richard Johnson, East India Company.

On the Form of the Eclipse.

The first mathematical treatment of the camera obscura.

4 Figs.

Inc. As in Bodeleian Arabic MS. DCCCLXXVII (2).

Expl. Ditto; excepting final sentence which is 'Thanks be unto God Lord of the Universe, and blessings be upon His prophet Muḥammad and all his kindred.'

E. Wiedemann. Erste Erwähnung der Dunkelkammer (Jahrbuch für Photographie, XXIV, 12-13, 1910).

Über die Camera Obscura (Sitzungsberichte der phys.-mediz. Societät in Erlangen, XLVI, 155-169, 1914).

H. J. J. Winter and W. 'Arafat. It is intended to publish a critical appreciation later.
O. Loth. Cat. Arabic MSS. India Office Lib., Lond., 1877, p. 213.

Cf. also Bibliothecae Bodleianae Codicum Manuscriptorum Orientalium Catalogus a Joanne Uri confectus. Pars prima, Oxonii 1787, p. 190, MS. DCCCLXXVII (2).

St. Petersburg. Cat. des MSS. et xylographes orient. de la Bibl. Imp. de St. Pétersbourg, 1852, MS. 192 (II).

AL-HASAN IBN AL-HASAN IBN AL-HAITHAM

Arabic.

London, India Office. Arabic MS. 767 (II). (Old no. MS. 461 (II)). Ff. 8-34.
MS. 9" × 5½". Probably 18th. cent.

On the Form of the Eclipse.

The first mathematical treatment of the camera obscura.

MS. in beautiful ta'liq hand.

4 clear figs.

Inc. As in Bodleian Arabic MS. DCCCLXXVII (2).

Expl. Ditto; excepting final sentence which is 'So ends the essay with God's help and guidance.'

- E. Wiedemann. Erste Erwähnung der Dunkelkammer (Jahrbuch für Photographie, XXIV, 12-13, 1910).
 Über die Camera Obscura (Sitzungsberichte der phys.-mediz. Societät in Erlangen, XLVI, 155-169, 1914).
- H. J. J. Winter and W. 'Arafat. It is intended to publish a critical appreciation later.
- O. Loth. Cat. Arabic MSS. India Office Lib., Lond., 1877, p. 222.
- Cf. also Bibliothecae Bodleianae Codicum Manuscriptorum Orientalium Catalogus a Joanne Uri confectus. Pars prima. Oxonii 1787, p. 190. MS. DCCCLXXVII (2).
- St. Petersburg. Cat. des MSS. et xylographes orient. de la Bibl. Imp. de St. Pétersbourg, 1852, MS. 192 (II).

AL-HASAN IBN AL-HASAN IBN AL-HAITHAM

London, India Office. Arabic MS. 734 (VI). (Old no. MS. 1270 (VI)). Ff. 21v-25r.
 MS. 11" × 4½". Probably XVII Cent. Originally in Library of Richard Johnson, East India Company.

On 'circular' burning-mirrors.

Gives the theory of the concave spherical mirror. Geometrical treatment of spherical aberration, but no discovery of the caustic curve.

9 Figs.

Inc. In the Name of God, the Compassionate, the Merciful. And my guidance is from God alone. A discourse by Al-Ḥasan ibn Al-Ḥasan ibn Al-Haitham on burning mirrors of 'circular' shape. The sun's rays proceed from the sun along straight lines and are reflected from every polished object at equal angles, i. e. the reflected ray subtends, together with the line tangential to the polished object which is in the plane of the reflected ray, two equal angles.

Expl. From this complex line we make a mirror by the method described above: its burning would be at the two given points. And what we have explained suffices about burning mirrors. This discourse on mirrors which cause burning by virtue of circles is thus completed. Thanks be to God, Lord of the Universe: and may God bless Muḥammad and all his kindred.

- E. Wiedemann. Ibn Al-Haithams Schrift über die sphärischen Hohlspiegel (Biblioth. Math. III (10); 293-307, Leipzig 1909-10).
- H. J. J. Winter and W. 'Arafat. A discourse on the concave spherical mirror by Ibn Al-Haitham. (Journ. Roy. As. Soc. Bengal, XVI, 1-16, 1950).
 Arabic text in: Rasā'il Ibn Al-Haitham (Dā'iratu'l-Ma'ārif-il-Osmānia, Hyderabad, Deccan, 1938).
- O. Loth. Cat. Arabic. MSS. India Office Lib., London, 1877, p. 213.

AL-ḤASAN IBN AL-ḤASAN IBN AL-HAITHAM

London, India Office. Arabic MS. 734 (V). (Old no. MS. 1270) (V)). Ff. 18r-21r.
MS. 11" × 4½". Probably XVII cent. Originally in Library of Richard Johnson, East
India Company.

On mirrors which cause burning by virtue of their curvature.

Describes the theory of the paraboloidal focussing mirror and the use of a 'lathe' in making such mirrors out of steel.

13 Figs.

Inc. In the Name of God, the Compassionate, the Merciful. And my guidance is from God alone. A treatise by Al-Ḥasan ibn Al-Ḥasan ibn Al-Haitham on the mirrors which cause burning by virtue of (conic) sections.

One of the noblest things which geometricians conceived, and about which the Ancients vied with one another, and by which the remarkable properties of geometrical figures were revealed in conjunction with their physical consequences, is the making of mirrors which cause burning by reflection of sunlight.

Expl. So this discourse covers the whole making of burning mirrors which are of this shape (paraboloidal), and they are the strongest of all burning mirrors because the rays are reflected from the whole of their surface to one point, and that is what we intended (to explain) in this treatise.

Thus ends the discourse on the burning mirrors, and praise be to God. May God bestow his blessings upon Muḥammad and his kindred.

E. Wiedemann and J. L. Heiberg. Ibn Al-Haithams Schrift über die parabolische Hohlspiegel. German and Latin. (Biblioth. Math. III (10), 201-237, Leipzig, 1909-10).

H. J. J. Winter and W. 'Arafat. Ibn Al-Haitham on the paraboloidal focussing mirror (Journ. Roy. As. Soc. Bengal, XV, 25-40, 1949).

Arabic text in: Rasā'il Ibn Al-Haitham (Dā'iratu'l-Ma'ārif-il-Osmāniya, Hyderabad, Deccan), 1938.

O. Loth. Cat. Arabic MSS. India Office Lib., Lond., 1877, p. 213.

Also cf. R. Dozy and M. Th. Houtsma. Cat. Codicum Orientalium Bibl. Acad. Lugduno-Batavae, III, 61. (6 vols. Leyden, 1851-1877).

NAṢĪR AL-DĪN MUḤAMMAD IBN MUḤAMMAD AL-ṬŪSĪ

Manchester. John Rylands. Arabic MS. 348 A (I). (Crawford no. MS. 447).
MS. 23 cm × 14½ cm. Late XVIII cent. Collected by Col. G. W. Hamilton, H. E. I. C. and
purchased by the Earl of Crawford in 1868.

On the reflection and refraction of light.

A short statement on the reflection of light from a polished surface and an attempt (unsuccessful) to explain refraction in a transparent medium.

3 Figs. *omitted* by scribe (spaces reserved).

Inc. In the Name of God, the Compassionate, the Merciful. This is a treatise on the reflection and refraction of rays by the investigator Naṣīr al-Dīn Muḥammad al-Ṭūsī, may God have mercy upon him.

The discussions respecting the reflection and refraction of rays are based on these premises: —

(Three premises are then stated at length).

Expl. It also becomes clear that each one of the angles of the ray is equal to the angles of reflection, "refraction", and penetration, which correspond to it; and also that reflection and "refraction" cannot occur except in one special place, that place in the case of each of them being in a certain position with respect to the luminous object; and that is what we intended to show.

The treatise is completed.

E. Wiedemann. Über die Reflexion und Umbiegung des Lichtes. (Eder's Jahrbuch für Photographie, XXI, 38–44, 1907).

H. J. J. Winter and W. 'Arafat. A statement on optical reflection and "refraction" attributed to Naṣīr ud-Dīn al-Ṭūsī (Isis, XLII, 138–142, 1951).

A. Mingana. Cat. Arabic MSS. John Rylands Library, Manchester, 1934, p. 538.

M. Kerney. Bibliotheca Lindesiana. Handlist of oriental MSS., Arabic, Persian, Turkish. Privately printed, 1898, p. 74.

Also cf. W. Ahlwardt. Kat. d. Berliner Königl. Bibliothek, V, No. 6020, p. 355.

NAṢĪR AL-DĪN MUḤAMMAD IBN MUḤAMMAD AL-ṬŪSĪ

Manchester. John Rylands. Arabic MS. 350 E (V). (Crawford no. MS. 381).
MS. 22 cm × 14.5 cm. Late XVIII cent. Collected by Col. G. W. Hamilton, H. E. I. C. and
purchased by the Earl of Crawford in 1868.

On the reflection and refraction of light.

Identical, except for minor differences, with Rylands MS. 348 A (I), but by a different hand. The writing, Indian ta'liq, is also less attractive.

3 Figs. *These are complete.*

Inc. Identical with Rylands. MS. 348 A (I).

Expl. Ditto.

E. Wiedemann. Über die Reflexion und Umbiegung des Lichtes. (Eder's Jahrbuch für Photographie, XXI, 38–44, 1907).

H. J. J. Winter and W. 'Arafat. A statement on optical reflection and "refraction" attributed to Naṣīr ud-Dīn aṭ-Ṭūsī (Isis, XLII, 138–142, 1951).

A. Mingana. Cat. Arabic MSS. John Rylands Library, Manchester, 1934, p. 546.

Also cf. W. Ahlwardt. Kat. d. Berliner Königl. Bibliothek, V, No. 6020, p. 355.

NAṢĪR AL-DĪN MUḤAMMAD IBN MUḤAMMAD AL-ṬŪSĪ
Arabic.

Manchester. John Rylands. Arabic MS. 350 D (IV). (Crawford no. MS. 381). Ff. 60v–80. MS. 22 cm × 14.5 cm. Late XVIII cent. Collected by Col. G. W. Hamilton, H. E. I. C. and purchased by the Earl of Crawford in 1868.

The Book of Optics of Euclid.

Al-Ṭūsī's version of the Optics of Euclid.

Colophon refers to the edition of this work completed by Al-Ṭūsī in 1253 A.D.

Carries an appendix attributed to Abū Yūsuf Ya'qūb ibn Ishāq Al-Kindī (fl. c. 835 A.D.)

73 Figs.

Inc. Essentially the same as Bodleian Arabic MS. DCCCLXXV (6).

Expl. The same as Bodleian Arabic MS. DCCCLXXV (6), but *continuing* thus:—

And that is what we wished to prove. The Book of Optics was completed by the scholar Al-Ṭūsī, and written in Shawal 651. This copy was made from another copy, which was itself copied from the manuscript written in the hand of the scholar Al-Shīrāzī.

Thanks be to God for its completion, and blessings be upon Muḥammad and all his kindred, the exalted of people.

A *short appendix* gives an elucidation by Al-Kindī of a point in Euclid's Optics.

J. L. Heiberg and H. Menge, Euclidis opera omnia, 8 vols. Leipzig, 1883–1916 (Vol. VII, Optics, 1895).

H. J. J. Winter and W. 'Arafat. It is hoped to publish this version in due course, comparing it with Bodleian Arabic MS. DCCCLXXV (6).

Arabic text in: *Ar-Rasā'ilus-Saba'-liṭ-Ṭūsī* (Da'iratu'l-Ma'ārif-il-Osmānīa, Hyderabad, Deccan), 1939.

A. Mingana. Cat. Arabic MSS. John Rylands Library, Manchester, 1934, p. 545.

Bibliothecae Bodleianae Codicum Manuscriptorum Orientalium Catalogus a Joanne Uri confectus. Pars prima, Oxonii 1787, p. 188, MS. DCCCLXXV (6).

Also cf. other references under India Office, Lond., Arabic MS. 743 (II).

NAṢĪR AL-DĪN MUḤAMMAD IBN MUḤAMMAD AL-ṬŪSĪ

Arabic.

London. India Office. Arabic MS. 743 (II). (Old MS. no. 1249 (II)). Ff. 36-56. Ms. 8½" × 4½". XVIIIth. cent. Library of Warren Hastings, East India Company.

The Book of Optics of Euclid.

Al-Ṭūsī's version of the Optics of Euclid.

In good ta'liq hand, clear diagrams.

73 Figs.

Inc. The same as Manchester Rylands Arabic MS. 350 D (IV).

Expl. Main text as in Manch. Ryl. MS. 350 D (IV) and Bodl. MS. DCCCLXXV (6), but ending simply "So ends the Book of Optics of Euclid, with diagrams, completed Jumāda 1st." (but no date A. H.)

J. L. Heiberg and H. Menge, *Euclidis opera omnia*, 8 vols., Leipzig, 1883-1916 (Vol. VII, Optics, 1895).

H. J. J. Winter and W. 'Arafat. Cf. Rylands Arabic MS. 350 D (IV).

Arabic text in: *Ar-Rasā'ilus-Saba'-liṭ-Ṭūsī* (Dā'iratu's-Ma'ārif-il-Osmānīa, Hyderabad, Deccan), 1939.

O. Loth. Cat. Arabic MSS. India Office Lib., Lond., 1877, p. 216.

A. Mingana. Cat. Arabic MSS. John Rylands Lib., Manch., 1934, p. 545.

Bibliothecae Bodleianae Codicum Manuscriptorum Orientalium Catalogus a Joanne Uri confectus. Pars prima, Oxonii 1787, MS. DCCCXCIV.

W. Ahlwardt. Kat. d. Berliner Königl. Bibliothek, Arab. Handschr. Nos. 6016, 6017, p. 355, 1893.

R. Dozy, P. de Jong, M. J. de Goeje. *Catalogus Cod. Orient. Bibl. Acad. Lugd.-Batav.*, 6 vols. Leiden, 1851-77. MS. 977.

S. E. Assemanus, *Catalogus MSS. Orient. Bibl. Medic.-Laurent et Palat.*, Florence, 1742, MSS. Palat. 271, 286.

K. Vollers and others, *Kat. der Arab. Handschr. der Vice. Kgl. Bibl. zu Kairo*, V. Bd. 1890, p. 199.

De Slane. Cat. Des. MSS. Arabes, Bibliothèque Nationale, MS. 2460.

TAQĪ AL-DĪN MUḤAMMAD IBN ZAIN AL-DĪN MA'RŪF
(1525-1585 A.D.)

Arabic.

Oxford. Bodleian. Arabic. MS. CMXXX. (Marsh 119). Ff. 3v.-83r.

MS. 25.9 cm × 17.4 cm. Dated 1574. (A. H. 982). Collection of Narcissus Marsh, Archbishop of Armagh; originally perhaps in that of Jacob Golius.

On Optics.

A long MS. dealing with (1) rectilinear propagation (2) reflection (3) refraction.

Colophon dated A. H. 982. The MS. appears to be in the author's own hand, as evidenced by the form of the colophon and by a laudatory note, (by one Muḥammad ibn Abī al-Ḥasan al-Handasī) on the back flyleaf.

Inc. In the Name of God, the Merciful, the Compassionate. God, the Light of Heaven and Earth, who gives light to the world, with the light of His existence, in extent and in depth. (Followed by a statement to the effect that the author had spent his whole life in studying science and mathematics, adding to the Optics of Euclid and other writings his own contributions.)

The investigation concerns vision, and the coming of rays from the light and from the bodies which produce light, and he wrote about these difficult investigations, which are enough to make the hair turn white.

Expl. This is stated by, and improved upon by the foresight of, and spoken by the tongue of him who is gifted by God the benevolent Ruler, one Taqī al-Dīn Muḥammad ibn Zain al-Dīn, the glory of sect and religion and the last of the investigators, Ma'rūf ibn al-Shaikh Shihāb al-Dīn Aḥmad ibn Muḥammad ibn Muḥammad ibn Aḥmad ibn Yūsuf ibn Aḥmad ibn al-Amīr Naṣr al-Dīn Mankū ibn al-Amīr Naskh al-Dīn Khumār Takīn al-Asad al-'Arīn, the prince of virility—May God bless them all—written at the beginning of 982 A. H.

H. J. J. Winter and W. 'Arafat. It is hoped to produce a critical account of this MS. later. *Bibliothecae Bodleianae Codicum Manuscriptorum Orientalium Catalogus a Joanne Uri confectus. Pars prima, Oxonii, 1787, p. 201-202.*

In conclusion, I would express my appreciation of the encouragement given to me by Dr. H. E. Stapleton and by Professor Charles Singer and

Mrs. Dorothea Waley Singer, and of the kindly co-operation of the many scholars and librarians who have helped me in my search for MSS; in particular I would record by indebtedness to Dr. A. F. L. Beeston, Keeper of Oriental Books in the Bodleian, Mr. S. C. Sutton, Librarian at the India Office, Miss M. E. Fell of the Royal Asiatic Society, and Professor E. Robertson and the late Dr. Henry Guppy of the Rylands Library. My thanks are also due to Dr. W. 'Arafat, now of the School of Oriental and African Studies, and Mr. Shehata Wahby of Cairo, who have at different times helped me in the interpretation of MSS.

NOTES

1. See A. G. Ellis and E. Edwards. *Descriptive List of Arabic Manuscripts acquired . . . since 1894*. British Museum, London, 1912 (Section XV).
2. See H. J. J. Winter and W. 'Arafat, *Isis* XLII, 138-142, 1951.
3. See further E. Wiedemann. *Sitz. d. phys.-mediz. Societät, Erlangen*, XLII, 15-58, 1910. H. J. J. Winter. *The optical researches of Ibn Al-Haitham* (Centaurus III, 1-21) Copenhagen, 1953.
4. Another MS. given by Michael Kerney as *Iṭḥafu-l Huḍūr*, and listed as optical, is not optical (see M. Kerney, MS. 446 a, p. 42. *infra*). It is hoped that the present catalogue is complete, within its restricted field, but should other MSS. come to light they will be described later. Full particulars are given under each MS., despite some repetition of references.

Reviews

Science, medicine and history. Essays on the evolution of scientific thought and medical practice written in honour of Charles Singer. Collected and Edited by E. Ashworth Underwood. Volume 1-2. Geoffrey Cumberlege, Oxford University Press. London, New York, Toronto, 1953. 563 + 646 p. 11 gns.

A short biographical note by E.A.U. opens the first volume and explains quite clearly why professor Singer was honoured by those two great volumes of essays.

Next comes an alphabetical list, with short biographical notes, of 95 contributors from all over the world, whose essays make up the bulk of the work.

The abundant material has been arranged into 8 books: The ancient world; the medieval world; the Renaissance; the new philosophy;—in volume 1. The insurgent century; the eighteenth century; the nineteenth century and after; conspectus generales;—in volume 2. Each of these books contains contributions on all sorts of subjects within the very wide scope of the work: archæology, history of science and technology, history of medicine.

At the end of the volume there is a bibliography of Charles Singer, of 412 entries chronologically arranged, and accompanied by an alphabetical subject index of more than four columns, in itself no small tribute to the learning and versatility of professor Singer; to this is added a long list of names of authors whose works have been reviewed.

As a matter of course the last volume contains indexes for the whole work, one of persons, and one of subjects.

It is impossible to give a detailed review of this wealth of material, and it would be invidious to single out five or ten or twenty contributions for special mention. I can only recommend to any library that can afford

the work and within whose scope it falls—and they must be very many—to buy it, and advise anyone with an interest in the history of human achievement in science, medicine and technology to get hold of it, in one way or another, and look forward to many profitable and pleasant hours spent with it.

A. G. Drachmann

P. H. van Cittert: *Astrolabes. A critical description of the astrolabes, noctilabes and quadrants in the care of the Utrecht University Museum.* Leiden, E. J. Brill, 1954. 50 pp. 13 fig. 17 plates. fl. 6.00.

The book contains a preface, descriptions of three astrolabes (1400–1540), two astronomical clocks (1564 and 1600), two noctilabes (what a word!) (1592 and ?), two astrological discs (1600), ten quadrants and one octant (1645–1760). To this are added five appendices explaining the horological and astrological usages of these times, A. Metius's tables of right ascensions and declinations from 1627, and a short list of references.

The descriptions of the instruments are thoroughgoing and careful, and the plates are very fine; there is a short, but quite sufficient introduction about the astrolabe and its use.

Two small points only invite criticism. A. Michel, in his *Traité de l'Astrolabe*, Gauthier-Villars, Paris, 1947, p. 38, makes a distinction between the *alhidade*, that is the sighting rod, generally placed on the back of the instrument, and the *ostensor*, the ruler placed on its front. In the present work only the word *alidade* is used, though it seems doubtful if a ruler without aperture sights should be called *alidade* in modern times. Michel's nomenclature would seem to be preferable.

For two of the astrolabes and one of the clocks tables are given to show the dating of the rete by means of the mediation. This is all to the good, but I fail to see the use of adding up figures as far apart as 1800 and 1000 to find an average. (In the *Archives internationales d'Histoire des Sciences*, 8. année, p. 377 sq. dr. Derek J. Price has called attention to the fact that these dates show more about the tables used for the instruments than about the instruments themselves; but this article was not available when the book under review was written.)

These are trifles, however, that detract little from what is certainly a solid piece of work and a very pleasing publication.

A. G. Drachmann

Dorothea Waley Singer & Annie Anderson: *Catalogue of Latin and vernacular plague texts in Great Britain and Eire in manuscripts written before the sixteenth century*. London, William Heinemann Medical Books Ltd., 1950. xi, 269 pp., 5 ff. n. ch. Autographié. (Collection de travaux de l'Académie internationale d'histoire des sciences. No. 5.)

Pour peu qu'on s'occupe d'histoire des sciences à l'époque médiévale, on a eu l'occasion de recourir à l'excellent instrument de travail que représente les trois volumes publiés de 1928 à 1931 par Mrs. Singer sous le titre: *Catalogue of Latin and vernacular manuscripts in Great Britain and Ireland dating from before the XVI. century*.

Ce qu'on sait moins généralement, c'est que, depuis de longues années, les recherches de Dorothea Waley Singer et d'Annie Anderson, sa collaboratrice, se sont étendues aux manuscrits scientifiques de toutes disciplines de la même époque, conservés dans les bibliothèques publiques et privées de Grande-Bretagne et d'Irlande. Les fiches auxquelles a abouti ce patient travail ont été déposées au Musée Britannique où elles sont à la disposition de tout usager du département des manuscrits. La Bibliothèque du Congrès à Washington, l'Institut Warburg de l'Université de Londres en possèdent des microfilms.

La présente publication reproduit celles de ces fiches qui concernent la peste. Elle forme à certains égards un complément du recueil que sous le titre *Some plague tractates (fourteenth and fifteenth centuries)*, Mrs. Singer a fait paraître en 1916 dans le tome IX de *Proceedings of the Royal Society of Medicine (Section of the History of Medicine)*. Elle comprend trois parties:

I. Pronostications astrologiques. – 13 textes représentés par 40 manuscrits et qui pour la plupart ont été analysés par Lynn Thorndike aux tomes III et IV de *A history of magic and experimental science*.

II. Traités de la peste dont l'auteur est connu ou, à défaut de l'auteur, l'origine. – 129 manuscrits pour 32 textes. On est frappé du nombre considérable des manuscrits, 81 en tout, qui contiennent des textes attribués à Jean de Bordeaux ou à Jean de Bourgogne, deux personnages qu'il n'est pas toujours facile de distinguer l'un de l'autre et dont les œuvres sont relativement rares dans les bibliothèques du continent. Le fameux *Compendium de epidimia* qui passe pour avoir été dédié par la Faculté de Médecine de Paris au roi de France Philippe VI de Valois, est représenté par un seul exemplaire, d'ailleurs incomplet, mais qui offre cette particularité qu'en 1373 il a été porté de Paris à Milan, alors que la

peste sévissait dans cette dernière ville. Références aux publications dont ces textes ont déjà fait l'objet; le recueil de Sudhoff, *Pestschriften aus den ersten 150 Jahren nach der Epidemie des schwarzen Todes, 1348* est constamment cité.

III. Traités de la peste anonymes. – 29 textes représentés par 29 manuscrits.

Ces trois parties constituent le catalogue proprement dit auquel viennent s'ajouter six appendices:

A. La peste dans les ouvrages généraux de médecine. – 12 exemples (113 manuscrits) choisis parmi les plus représentatifs des diverses époques. Ils sont tirés de Galica, de Rhazès, d'Avicenne, de Guillaume de Plaisance (plus connu sous le nom de Guillaume de Salicet), de Bernard Gordon, de Gentile de Foligno et de Guy de Chauliac.

B. La peste dans les ouvrages non médicaux. – 166 manuscrits représentant 5 ouvrages: *Etymologiae* et *De naturis rerum* de saint Isidore de Séville, *De natura rerum* de Bède le Vénérable, *Imago mundi* d'Honorius d'Autun, *De consideratione quintae essentiae* de Jean de Roquetaillade.

C. Recettes et charmes. – Liste de 66 + 4 textes qui, non plus que celle qui suit, ne prétend être exhaustive.

D. Prières et thaumaturgie. – 16 textes, 24 manuscrits. On est surpris de n'y trouver aucune allusion à saint Roch.

E. Divers inédits. – 11 textes représentés par 14 manuscrits. Fragments de chroniques, de lettres, etc.

F. Bibliographie. – Sélection de 29 ouvrages et articles de revues. En tête de liste, *History of epidemics in Great Britain* de Creighton.

Trois tables alphabétiques: 1° titres et incipits; 2° noms de lieux et de personnes, avec sous les rubriques *Dutch, English, French, German, Greek, Irish, Italian, Welsh*, l'indication des manuscrits rédigés dans une langue autre que le latin; 3° topographie des dépôts (j'en ai relevé 68).

Ce répertoire dont aucun historien de la médecine ne méconnaîtra l'utilité est d'un bon augure pour le développement de l'activité de la Commission bibliographique de l'Académie Internationale d'Histoire des Sciences dont Mrs. Singer est la distinguée Présidente. Il fait souhaiter d'autant plus vivement une publication prochaine de l'œuvre monumentale dont le Musée Britannique est l'heureux dépositaire.

Ernest Wickersheimer

Simon Stevin: *The principal works, vol. I: General introduction, Mechanics*, ed. E. J. Dijksterhuis. Amsterdam, C. V. Swets & Zeitlinger, 1955. gross-8°, VI + 617 S.

Nach dem glücklichen Abschluss der grossen Huygens-Ausgabe hat sich die Niederländische Gesellschaft der Wissenschaften mit mehreren anderen gelehrten Vereinigungen zu einem neuen wissenschaftsgeschichtlichen Unternehmen zusammengetan, der Herausgabe der Hauptwerke von S. Stevin (1548 bis 1620). Die Ausgabe erfolgt im Auftrag der Niederländischen Akademie der Wissenschaften und steht unter der Leitung ausgezeichneter Fachleute. Geplant sind 5 Bände: Mechanik, Mathematik, Astronomie und Seefahrtkunde, Kriegskunst und Technik. Die Edition bringt die fraglichen niederländischen Originalausgaben in Faksimile-Wiedergabe; diesen Texten ist eine englische Übersetzung gegenübergestellt, der in bescheidenem Masse auch Anmerkungen beigegeben sind. Der Hauptteil der wissenschaftsgeschichtlichen Erläuterungen und Ergänzungen ist den Einleitungen zugewiesen, die ebenfalls in Englisch wiedergegeben sind.

Soeben ist der Band I erschienen; er wird von E. J. Dijksterhuis herausgegeben, der den Lehrstuhl für Wissenschaftsgeschichte an den Universitäten Leiden und Utrecht innehat – einer der führenden Stevin-Forscher, dem wir auch die verdienstvolle Monographie über Stevin (d. Haag 1943) verdanken. Wir lesen zunächst (S. 1/15) eine kurze Lebensbeschreibung Stevins; dann folgt (S. 16/24) eine Übersicht über das reichhaltige Schaffen, hierauf (S. 25/34) die Bibliographie der Werke des großen Ingenieurs. Die Edition besteht aus drei jeweils selbständig paginierten niederländischen Abhandlungen des Jahres 1586 (Leiden bei Chr. Plantin), die in die *Wisconstighe Gedeachtenissen* (Leiden 1608) und deren Übersetzungen ins Französische (von J. Tuning, Leiden 1608) und ins Lateinische (von W. Snell, Leiden 1608) und in die von A. Girard besorgte Ausgabe der *Œuvres mathématiques* (Leiden 1634) übergegangen sind. Stevin knüpft an Archimedes und Heron an. In der ersten Abhandlung entwickelt er die Elemente der Statik (»Wägekunst«). Buch I bezieht sich auf die Grundlagen (Höhepunkt: Kräfteparallelogramm), Buch II auf Schwerpunktbestimmungen (Höhepunkt: methodische Verbesserung des Archimedischen Vorgehens durch Vereinfachen der Schlußweise). In der zweiten Abhandlung folgen die praktischen Anwendungen. Den Anfang macht die praktische Schwerpunktbestimmung durch Aufhängen bzw. Unterstützen längs einer Schneide. Dann wird die gleicharmige und die

Schnellwaage behandelt, schliesslich erscheinen Anwendungen des Hebelgesetzes. Die dritte Abhandlung bezieht sich auf die Elemente der Hydrostatik. Auch sie bringt interessante Fortschritte gegenüber den Vorlagen, vor allem die Erscheinungen des hydrostatischen Paradoxons. In einem Anhang setzt sich Stevin kritisch mit verschiedenen Zeitgenossen auseinander. Die Ausgabe von 1608 enthält Zusätze, worunter eine Studie über den Flaschenzug, eine andere über den (von Stevin neu geschaffenen) Begriff des Metazentrums und eine dritte (nicht ganz richtige) über das Zaumzeug des Pferdes. Besonders interessant ist die Behandlung eines von mehreren Gewichten gespannten Seiles. Die dort stehende Abbildung (S. 536) ist das Vorbild für die entscheidende Figur in Huygens' Jugendschrift von 1646, in der gezeigt wird, daß die Parabel nicht die Kettenlinie sein kann.

Das ausgezeichnet ausgestattete Werk bedeutet für unser Wissen um die Entwicklung der exakten Wissenschaften in der zweiten Hälfte des 16. Jahrhunderts einen großen Gewinn. Hoffentlich können wir recht bald auf das Erscheinen der weiteren Bände hinweisen.

Jos. E. Hofmann

Lucy Wilder: *The Mayo Clinic*. Second ed. Springfield, Ill., Charles C. Thomas, 1955, 69 pp., ill.

"It seems to my brother and myself that the crowning endeavor of a life in medicine would be to aid in the development of medical education and research." These words of profound ethics, very typical for the man and his philosophy of living, were written in a letter from Dr. William J. Mayo to the University of Minnesota on February 15, 1934, when he and his brother, Dr. Charles Horrace Mayo, donated another 500,000 dollars "to the endowment of the Mayo Foundation for Medical Education and Research", to which they had already given many years ago about 2 million dollars.

Lucy Wilder has given us in pleasing form a description of the famous Mayo Clinic in Rochester, Minnesota, famous and loved not only by the thousands of patients who have made pilgrimages to the well-known hospital, but also by doctors from every part of the world who have been the pupils of the doctors Mayo and their staff.

The father of the famous brothers Mayo, Dr. William Worrall Mayo, journeyed from England to the U.S.A. in 1845. The clinic has developed

from a small hospital, improvised on account of the damages from a cyclone passing the northern section of Rochester on August 21, 1883. In collaboration with the Sisters of St. Francis, Dr. Mayo erected in 1889 a larger hospital, and that was the beginning of the Clinic. His two sons were both skilful surgeons, and soon a famous medical school developed from the practioner's private practice and his little hospital.

During the last summer the referent had the opportunity to visit the Mayo Clinic, its very imposing diagnostic centres and the hospitals now connected with the Clinic. Also the library, which contains excellent collections of medical books and manuscripts, is worth seeing. The atmosphere of the Clinic—the Mecca of modern medicine—is quite individual and most stimulating. You will find everywhere the newest in medicine and the best possible conditions for the many patients. Many of the members of the staff—such as Dr. Philip Hench, the Nobel prize winner,—have been world-famous for distinguished research work.

In this entertaining book by Lucy Wilder, one follows the development of the clinic and sees from the patient's point of view how it functions to-day.

Wolfram Kock

E. D. Merrill: *The Botany of Cook's Voyages and its unexpected significance in relation to Anthropology, Biogeography and History*. Waltham, Mass. (Berlin-Charlottenburg: R. Friedländer u. Sohn), 1954. 228 p., 36 pl. and illustr., cloth \$ 4.75. (Chronica Botanica vol. 14, nr. 5/6.)

Die Herkunft vieler auf den pazifischen Inseln (Tahiti usw.) kultivierten Nutzpflanzen war lange Zeit umstritten. O. F. Cook (1903) und in neuester Zeit (1950.1952) T. Heyerdahl stellten die These auf, daß Polynesien von Amerika aus besiedelt wurde und daß aus diesem Erdteil auch die Kulturpflanzen, Unkräuter und Haustiere auf die pazifischen Inseln gekommen seien. In vorliegendem Werke widerlegt der Verf., wohl einer der besten Kenner der polynesischen und asiatischen Flora, diese Ansicht. Er beweist, daß vor Magellans Fahrt (1521) die in Polynesien kultivierten Nahrungspflanzen vom Westen her und zwar von Indonesien (Malaya) aus die pazifischen Inseln erreichten. Dazu gehören z. B. die Gattungen *Colocasia*, *Dioscorea*, *Alocasia* und an die 30 Unkräuter. Nur eine einzige Nahrungspflanze, nämlich die Batate (*Ipomoea batatas*) ist möglicherweise(!) schon vor Magellan aus Amerika (Südamerika?) nach Polynesien gekommen

sein. Merrill gründet seine Forschungen besonders auf die botanischen Ergebnisse der James Cook'schen Fahrten im pazifischen Raum. Der Botaniker Solander, der Cook auf seiner ersten Reise (1769) begleitete, hat eine bisher ungedruckte und nur handschriftlich erhaltene Flora der pazifischen Inseln hinterlassen (*Primitiae Florae Insularum Oceani Pacifici*), in der er die vom 13. April bis zum 9. August 1769 auf Tahiti (und den benachbarten Inseln) gesammelten Pflanzen aufzählt. Dieses Manuskript hat Merrill im Britischen Museum (London) eingesehen. Ebenso hat er die botanischen Forschungsergebnisse der beiden Forster (1776 und 1786) auf Cook's zweiter Reise (1772/75) herangezogen. Weitere Aufschlüsse lieferten die Belegexemplare im Herbar des Britischen Museums. Im einzelnen beschäftigt sich Merrill mit der Geschichte der Baumwolle (*Gossypium*) und weist nach, daß von diese pantropischen Pflanzengattung schon sehr früh in *beiden* Hemisphaeren unabhängig von einander Kultursorten gezogen wurde. E. Anderson's Ansicht, daß der Mais (*Zea mais*) in Asien (Assam, Burma) seine eigentliche Heimat habe, also schon vor der Ankunft der Portugiesen (um 1500) in Vorderindien vorgekommen und von da über Malaya und Polynesien nach Amerika gebracht worden sei, lehnt Merrill unbedingt ab: der Mais ist unzweifelhaft eine amerikanische Pflanze. So ergeben sich aus Merrill's Werk eine große Anzahl neuer wichtiger Erkenntnisse für die Herkunft und Verbreitung tropischer Kulturpflanzen. Aber auch Ethnologen, Biogeographen, Genetiker, ja sogar Historiker und Philologen (es werden auch Pflanzennamen der Eingeborenen Sprachen erörtert) werden das Buch mit Gewinn lesen. Schließlich sei noch auf die vorzügliche Ausstattung des Werkes mit Bildern (nach alten Vorlagen) und Faksimilia hingewiesen.

Heinrich Marzell